BACHILLERATO 2

MATEMATICAS

EJERCICIOS DE EXAMEN

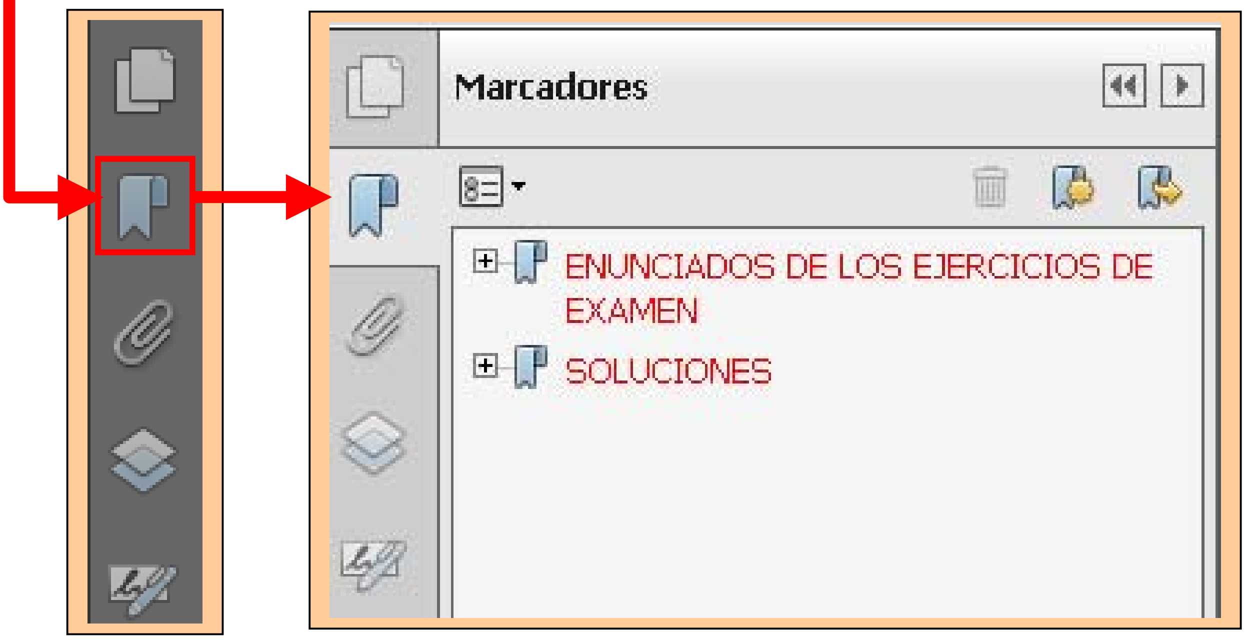
MAQUINA VOLADORA DE LEONARDO DA VINCI

Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO
EJERCICIOS DE EXAMEN

**A Regino, mi padre;
sin su ilusión no
existiría Fonemato.**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

FONEMATO 01

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ \beta \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1) Determine los valores de α para los que el sistema $AX = C_1$ es incompatible.

2) Determine los valores de β para los que el sistema $AX = C_2$ es compatible y resuelve el sistema para cada uno de estos valores.

3) Para $\alpha = 3$ y $\beta = -13$, estudia el sistema $AX = C_1 + C_2$; si es posible, resuélvelo, y si no es posible, indica por qué.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -9 & \alpha \end{bmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, es $rg(A) = 2$, y el sistema resulta incompatible si $rg(B) = 3$, lo que sucede si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -\alpha + 2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2$$

2) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & -9 & \beta \end{bmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ es $rg(A) = 2$, y el sistema es compatible si $rg(B) = 2$, lo que sucede si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\beta - 13 = 0 \Rightarrow \beta = -13$

Para calcular las infinitas soluciones del sistema $AX = C_2$ cuando $\beta = -13$, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2.z - 6 \\ 2.x + y = -z - 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - 3.z \\ y = -1 + 5.z \end{cases}$$

Así, siendo $S_{\beta=-13}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $\beta=-13$, es:

$$S_{\beta=-13} = \underbrace{\{(-5-3.z;-1+5.z;z),\ \forall z \in \Re\}} =$$

Identificación en forma paramétrica

solución del SLNH obtenida para $z = 0$

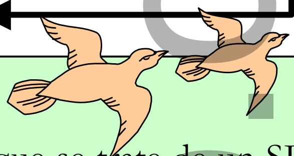
$$= \{\overbrace{(-5;-1;0)} + \underbrace{(-3.z;5.z;z)},\ \forall z \in \Re\} =$$

LATIGUILLO

$S^* = \{(-3.z;5.z;z),\ \forall z \in \Re\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$= \{(-5;-1;0) + z \bullet \underbrace{(-3;5;1)},\ \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$$

proporcional a $(-1;3;5)$



Matrícula de honor

Eso es lo que te dará tu profe, independientemente de que se trate de un SLH o de un SLNH, escribes un latiguillo final que llene de contenido geométrico la historia de los sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas; es decir, un latiguillo que relacione el conjunto "S" de las infinitas soluciones de un sistema lineal con 3 incógnitas con las rectas y los planos del universo tridimensional que percibimos con los sentidos. En concreto:

1) Si en "S" hay un único parámetro, por ejemplo:

$$S = \{(z;-2.z;z),\ \forall\ z \in \Re\} \text{ ó } S = \{(x;-2.x;3+x),\ \forall\ x \in \Re\}$$

te despides diciendo que, en términos geométricos, "S" es una recta del espacio tridimensional que perciben nuestros sentidos.

2) Si en "S" hay dos parámetros, por ejemplo:

$$S = \{(x;-2.z;z),\ \forall\ x,z \in \Re\} \text{ ó } S = \{(x+19;-2.z;z),\ \forall\ x,z \in \Re\}$$

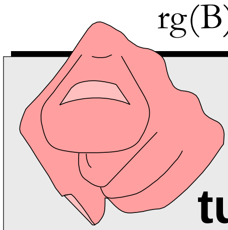
te despides diciendo que, en términos geométricos, "S" es un plano del espacio tridimensional que perciben nuestros sentidos.

3) Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

Como en la matriz "B" es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces:

$$\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A) \Rightarrow \text{el sistema } AX = C_1 + C_2 \text{ es incompatible}$$



Cada tipo de ejercicio admite uno o más latiguillos; si los dominas todos, tu solución parecerá la de un profesional.

FONEMATO 02

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$(a-2).x-y+z=0\ ;\ x+(2.a-1).y-a.z=0\ ;\ x+a.y-z=0$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: estamos ante un sistema lineal homogéneo $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ siempre tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema siempre es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x=y=z=0$. El sistema admitirá sólo la solución trivial o tendrá infinitas soluciones según que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual o sea inferior al número de incógnitas (o sea, 3).

La matriz "A" de los coeficientes es $A=\begin{bmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2.a-1 & -a \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}$, y se tiene:

$$|A|=0 \Rightarrow (a-2).(a^2-2.a+1)=0 \Rightarrow a=2{,}1 \text{ (doble)}$$

Por tanto, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial sólo si $a=1$ ó $a=2$, pues en tal caso es $|A|=0 \Rightarrow rg(A)<3$.

- Si $a=2$ es $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, siendo $|A|=0$.

  Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, resulta ser:

  $rg(A)=2<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

  Para calcular las infinitas soluciones, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{r} -y=-z \\ x+3.y=2.z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=z \end{array}\right.$$

  Siendo $S_{a=2}$ el conjunto de las infinitas soluciones del sistema si $a=2$, es:

  $$S_{a=2}=\{(-z;z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=\{z\bullet(-1;1;1),\ \forall\ z\in\Re\}$$

  Latiguillo → toda solución el proporcional a la solución $(-1;1;1)$

- Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & -1 \end{bmatrix}$, siendo $|A|=0$.

  Como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, resulta ser:

  $rg(A)=1<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

  Para calcular las infinitas soluciones, eliminamos la 1ª y 2ª ecuaciones y parametrizamos "y" y "z", pasándolas al 2º miembro de la ecuación; resulta: $x=-y+z$. Así, siendo $S_{a=1}$ el conjunto de las infinitas soluciones si $a=1$, es:

  $$S_{a=1}=\{(-y+z;y;z),\ \forall y,z\in\Re\}=\{y\bullet(-1;1;0)+z\bullet(1;0;1),\ \forall y,z\in\Re\}$$

  Latiguillo → toda solución es suma de una solución proporcional a $(-1;1;0)$ y de una solución proporcional a $(1;0;1)$

FONEMATO 03

Discuta el siguiente sistema según los valores de "k", y resuélvalo si $k = 1$.

$$\begin{aligned} k.x + 2.z &= 0 \\ k.y - z &= k \\ x + 3.y + z &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; |A| = k^2 + k = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ es $rg(A) = 3 = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).
- Si $k = 0$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $k = -1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

  Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

- Si $k = 1$ sabemos que el sistema tiene solución única, y la obtenemos mediante la regla de Cramer; siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

  es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -2 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

Latiguillo de remate

En términos geométricos, cada ecuación del sistema representa a un plano del espacio tridimensional que percibimos con los sentidos, y el que el que el sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas dado tenga **solución única** significa que los correspondientes 3 planos **se cortan** en un punto formando un **triedro.**

FONEMATO 04

Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$\begin{aligned} a.x + y + b.z &= 1 \\ x + a.y + b.z &= 1 \\ x + y + a.b.z &= b \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & a.b \end{bmatrix}$.

Determinemos los valores de "a" y "b" que anulan al determinante de "A":

$$|A| = b.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b.(a^3 - 3.a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \text{ (doble)} \\ a = -2 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $b \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 = n^o$ de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado.

- Si $b = 0$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora estudiamos el rango de "B"; es:

$$rg(B) = rg\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eliminamos la tercera columna, pues está formada por ceros

y se tiene que: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2.a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Por tanto, si $a \neq 1$ es $rg(B) = 3 \neq rg(A)$; así, el sistema es incompatible. Si $a = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

siendo incompatible el sistema, pues $rg(A) \neq rg(B)$.

- Si $a=1$ ($\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)\le 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&b\\1&1&b\\1&1&b\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1,\ \forall\ b\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&1&b&1\\1&1&b&1\\1&1&b&b\end{bmatrix}$$

Ahora estudiamos el rango de "B"; es:

$$rg(B)=rg\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&b\end{bmatrix}$$

eliminamos la segunda columna, por ser igual a la primera
eliminamos la tercera columna, por ser proporcional a la primera

Si $b\ne 1$ es $rg(B)=2\ne rg(A)$; por tanto, el sistema es incompatible. Si $b=1$ es $rg(B)=1=rg(A)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

- Si $a=-2$ ($\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)\le 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&b\\1&-2&b\\1&1&-2.b\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2,\ \forall\ b\ ;\ B=\begin{bmatrix}-2&1&b&1\\1&-2&b&1\\1&1&-2.b&b\end{bmatrix}$$

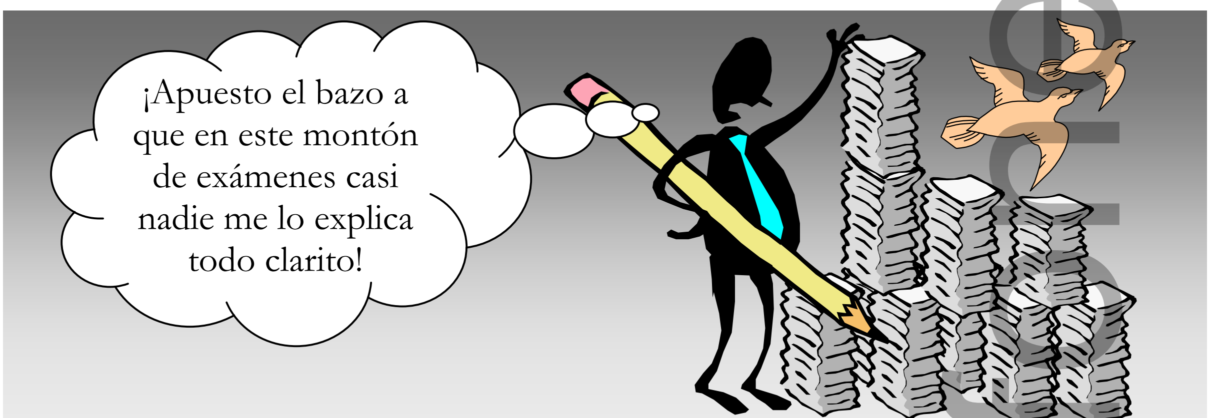
pues $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\ne 0,\ \forall\ b$

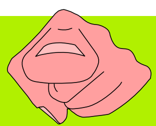
Ahora estudiamos el rango de "B" calculando el siguiente menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&b\end{vmatrix}=3.b+6\ne 0\Rightarrow b\ne -2$$

Por tanto, siendo $b\ne -2$ es $rg(B)=3\ne rg(A)$, y el sistema es incompatible. Si $b=2$, como $rg(A)=2$ para todo valor de "b", resulta:

$$rg(A)=rg(B)=2<\text{número de incógnitas}\Rightarrow \text{compatible e indeterminado}$$




A tu profe le pasa como a ti: cuanto más clarito le explicas las cosas, más contento se pone.

FONEMATO 05

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores de "a".

$$x + y + a.z = a \ ; \ a.x + a.y + z = 1 \ ; \ x + a.y + z = a$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$, siendo $|A| = a^3 - a^2 - a + 1$, que se anula si $a = 1$ (doble) o si $a = -1$. Por tanto:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado, su única solución nos la da Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -1 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

- Si $a = 1$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$), es $A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

  Como $rg(A) = rg(B) = 1 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, eliminamos las ecuaciones segunda y tercera y parametrizamos las incógnitas "x" y "z", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta $y = 1 - x - z$. Así, siendo $S_{a=1}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = 1$, es:

$$S_{a=1} = \{\underbrace{(x;1-x-z;z), \ \forall \ x,z \in \Re}_{\text{Identificación en forma paramétrica}}\} =$$

$$= \{(\underbrace{0;1;0}_{\text{solución del SLNH obtenida para } x = z = 0}) + (x;\underbrace{-x-z;z}), \forall x,z \in \Re\} =$$

$S^* = \{(x;-x-z;z), \forall x,z \in \Re\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$= \{(0;1;0) + x \bullet \underbrace{(1;-1;0)}_{\text{proporcional a } (1;-1;0)} + z \bullet \underbrace{(0;-1;1)}_{\text{proporcional a } (0;-1;1)}, \forall x,z \in \Re\} \subset \Re^3$$

LATIGUILLO

- Si $a=-1$ ($\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)\le 2$), las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=2 \;\; ; \;\; B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 1ª ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} -x-y &= 1-z \\ x-y &= -1-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=z \end{cases}$$

Siendo $S_{a=-1}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a=-1$, es:

$$S_{a=-1}=\underbrace{\{(-1;z;z),\ \forall z\in\Re\}}=$$

Identificación en forma paramétrica

solución del SLNH obtenida para $z=0$

$$=\{\underbrace{(-1;0;0)}+\underbrace{(0;z;z)},\ \forall z\in\Re\}=$$

LATIGUILLO

$S^*=\{(0;z;z),\ \forall z\in\Re\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$=\{(-1;0;0)+z\bullet\underbrace{(0;1;1)},\ \forall z\in\Re\}\subset\Re^3$$

proporcional a $(0;1;1)$

Latiguillo de remate

En términos geométricos, el conjunto $S_{a=-1}=\{(-1;z;z),\ \forall z\in\Re\}$, que está identificado mediante un parámetro, viene a ser una recta del espacio tridimensional que percibimos con los sentidos.

El conjunto $S_{a=1}=\{(x;1-x-z;z),\ \forall\ x,z\in\Re\}$, que está identificado mediante dos parámetros, viene a ser un plano de dicho espacio tridimensional.

LOS "LATIGUILLOS", ASUNTO ESENCIAL

En examen no debes conformarte sólo con hacer el calculote de los problemas; los problemas deben bordarse, y eso se consigue con los latiguillos, que son las herramientas que usaremos para que las Matemáticas que escribamos se diferencien de las que escriben el resto de los mortales y así parezca que sabemos más que ellos. Los latiguillos también nos protegen de las consecuencias de los inevitables errores de cálculo (nadie está libre de escribir 2 + 3 = 6 y así destrozar todos los cálculos de un problema): un profesor mentalmente equilibrado jamás te suspenderá por un error de cálculo si con los latiguillos le has vendido la moto de que sabes de qué estás hablando y que entiendes la historia que llevas entre manos.

FONEMATO 06

Discuta el siguiente sistema lineal en función del parámetro "a":

$$a.x + y + z = 0 \;\; ; \;\; x + a.y = 0 \;\; ; \;\; 3.x + a.z = 0$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: estamos ante un sistema lineal homogéneo $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ siempre tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema siempre es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$. El sistema admitirá sólo la solución trivial o tendrá infinitas soluciones según que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual o sea inferior al número de incógnitas.

La matriz "A" de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix}$, siendo $|A| = a^3 - 4.a$, que se anula si $a = 0$, $a = 2$ ó $a = -2$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 =$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible y determinado (sólo tiene la solución trivial).
- Si $a = 0$ ó $a = 2$ ó $a = -2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) <$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones).

FONEMATO 07

Resuelva el sistema $\begin{cases} -3.x + y + 2.z = 1 \\ x + 5.y - z = 4 \\ -4.x - 2.y + 3.z = -1 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

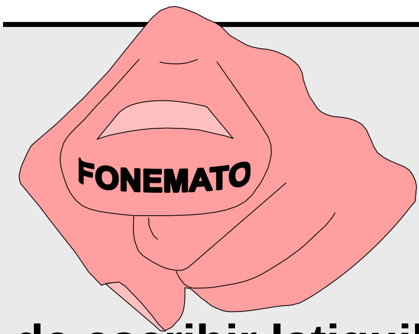
- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Como la matriz de los coeficientes del sistema tiene determinante no nulo, ocurre que $rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado; la única solución que tiene la obtenemos mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \;;\; z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = 3$$

Latiguillo de remate

En términos geométricos, cada ecuación del sistema representa a un plano del espacio tridimensional que percibimos con los sentidos, y el que el que el sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas dado tenga solución única significa que los correspondientes 3 planos se cortan en un punto formando un triedro.



Si aprovechas las Matemáticas de Bachillerato para educarte en el arte de escribir latiguillos, cuando estés en la Universidad, en los exámenes, serás capaz de escribir latiguillos sobre cualquier disciplina que se exprese mediante números... con el consiguiente gozo para todos tus profesores.

FONEMATO 08

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "a".

$$a.x + a.y = a \ ; \ (1-a).z = a+1 \ ; \ y + z = a - 1$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, siendo $|A| = a.(a-1)$, que se anula si $a = 0$ o si $a = 1$. Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas. Así, el sistema es compatible y determinado.
- Si $a = 1$ $(\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2)$ es $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, siendo $rg(B) = 3$.

  El sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$.
- Si $a = 0$ es $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0 & 1} \\ 0 & \boxed{1 & 1} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

  Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos la incógnita "x", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left. \begin{array}{r} z = 1 \\ y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Siendo $S_{a=0}$ el conjunto de las infinitas soluciones si $a = 0$, es:

En términos geométricos $S_{a=0}$ es una recta.

$$S_{a=0} = \{\underbrace{(x;-2;1), \ \forall x \in \Re}\} =$$

Identificación en forma paramétrica

solución del SLNH obtenida para $x = 0$

$$= \{\overbrace{(0;-2;1)} + \underbrace{(x;0;0), \ \forall x \in \Re}\} =$$

$S^* = \{(x;0;0), \ \forall x \in \Re\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$= \{(0;-2;1) + x \bullet \underbrace{(1;0;0), \ \forall x \in \Re}\} \subset \Re^3$$

proporcional a $(1;0;0)$

LATIGUILLO

FONEMATO 09

Discuta el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "a", y halle todas sus soluciones cuando sea compatible e indeterminado.

$$\begin{aligned} a.x + y + z &= a \\ x + a.y - z &= 1 \\ 3.x + y + a.z &= 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$.

Determinemos los valores de "a" que anulan al determinante de "A":

$$|A| = a^3 - 3.a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si es $a \neq 2$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $a = 2$ $(\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

  El sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$.

- Si $a = -1$ $(\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix}} & & -1 \\ & & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la primera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 + z \\ 3.x + y &= 2 + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = (3 + 2.z)/4 \\ y = -(1 + 2.z)/4 \end{cases}$$

  Siendo $S_{a=-1}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = -1$, es:

$$S_{a=-1} = \left\{ \left(\frac{3 + 2.z}{4}; -\frac{1 + 2.z}{4}; z\right), \forall z \in \Re \right\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 10

Discuta, en función de los parámetros "a" y " b", y resuelva, en los casos en que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + a.z = 1 \ ; \ x + y + b.z = a \ ; \ x + a.y + z = a$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$.

Determinemos los valores de "a" que anulan al determinante de "A":

$$|A| = b + a^2 - a - a.b = b.(1-a) - a.(1-a) = (b-a).(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $b \neq a$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas; el sistema es compatible y determinado; la única solución que tiene la obtenemos mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots$$

- Si $a = b \ (\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2)$, es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

  Como el máximo que ahora puede tener "A" es 2, y "B" puede tener rango 3, estudiamos el rango de "B"; es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 2.a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ (doble)}$$

  * Si $a \neq 1$ es $rg(B) = 3 \neq rg(A)$; por tanto, el sistema es incompatible.

  * Si $a = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Ahora es $rg(A) = rg(B) = 1 <$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado. Para calcularlas, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, eliminamos las ecuaciones segunda y tercera y parametrizamos las incógnitas "x" y "z", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta $y = 1 - x - z$.

  Siendo $S_{a=b=1}$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = b = 1$, es:

$$S_{a=b=1} = \{(x; 1 - x - z; z), \forall x, z \in \Re\} \subset \Re^3$$

- Si $a=1$ $(\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg(A)\leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & b\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Obviamente, para todo valor de "b" es $rg(A)=rg(B)$; por tanto, si $a=1$ el sistema es compatible para todo valor de "b".

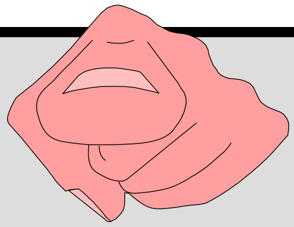
Si $b=1$ estamos en el caso anterior $(a=b=1)$.

Si $b\neq 1$ es $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado. Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "x", pasándola al segundo miembro de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{array}{r}y+z=1-x\\ y+b.z=1-x\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1-x\\ z=0\end{array}\right.$$

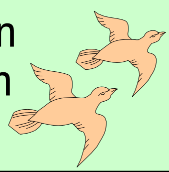
Así, siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a=1$ y $b\neq 1$, es:

$$S=\{(x;1-x;0),\forall x\in\Re\}\subset\Re^3$$



¡TODO ERROR CONCEPTUAL GORDO
ANULA EL EFECTO DE LOS LATIGUILLOS
Y TE DEJA CON EL CULO AL AIRE!

En toda asignatura dura hay "cosas" que caen en examen con mucha frecuencia; tu trabajo es averiguar cuáles son y preparar los correspondientes latiguillos para ellas.



FONEMATO 11

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2.y + z = 1 \\ 2.x + y + 2.z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix} x + 2.y = 1 - z \\ 2.x + y = 2 - 2.z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$$

Por tanto, siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \left\{(1 - z; 0; z), \forall z \in \Re\right\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 12

Discuta el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$x+(a+1).y+b.z=a\ ;\ a.y+b.z=a+b\ ;\ x+2.y+z=b$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A=\begin{bmatrix}1 & a+1 & b\\ 0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Determinemos los valores de "a" que anulan al determinante de "A":

$$|A|=a-b=0\Rightarrow a=b$$

Por tanto:

- Si $a\neq b\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.
- Si $a=b\ (\Rightarrow |A|=0\Rightarrow rg(A)\leq 2)$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1 & a+1 & a\\ 0 & a & a\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}1 & a+1 & a & a\\ 0 & a & a & 2.a\\ 1 & 2 & 1 & a\end{bmatrix}$$

Como el máximo que ahora puede tener "A" es 2, y "B" puede tener rango 3, estudiamos el rango de "B"; es:

$$\begin{vmatrix}1 & a+1 & a\\ 0 & a & 2.a\\ 1 & 2 & a\end{vmatrix}=2.a^2-2.a=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=1\end{cases}$$

∗ Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ es $rg(B)=3\neq rg(A)$; por tanto, el sistema es incompatible.

∗ Si $a=0$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Como $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

∗ Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, y $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Como $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

FONEMATO 13

Halle las soluciones comunes a los sistemas:

$$S_1:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases} \; ; \; S_2:\begin{cases} 3.x+y+z=5 \\ 2.x-4.y-4.z=0 \end{cases}$$

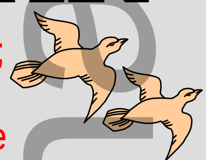
SOLUCIÓN

Las soluciones comunes a ambos sistemas lineales son los elementos del conjunto $\Re^3$ que a la vez satisfacen las ecuaciones que definen a S_1 y las que definen a S_2; o sea, son las soluciones del sistema lineal que se obtiene al reunir las ecuaciones de S_1 y las de S_2:

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ x-y-z&=1 \\ 3.x+y+z&=5 \\ 2.x-4.y-4.z&=0 \end{aligned}$$

Puedes comprobar que las matrices de coeficientes y ampliada de este último sistema tienen rangos distintos (2 la de los coeficientes y 3 la ampliada); por tanto, el sistema es incompatible; es decir, los sistemas lineales dados carecen de soluciones comunes. **Naturalmente, en examen, antes de este párrafo habría que escribir el "latiguillo" correspondiente a los sistemas lineales.**

SABER ESTUDIAR



Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees; es decir, tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero en caso de atranque para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte; o sea, si no eres capaz de llenar de contenido pleno una palabra o símbolo, invierte el tiempo que sea menester (dos minutos, dos horas, dos semanas, dos meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.

FONEMATO 14

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2.y + 3z &= a \\ 2.x + 3.y + 4.z &= a \end{aligned}$$

Razone si es posible encontrar un sistema equivalente al dado, pero que tenga sólo dos ecuaciones.

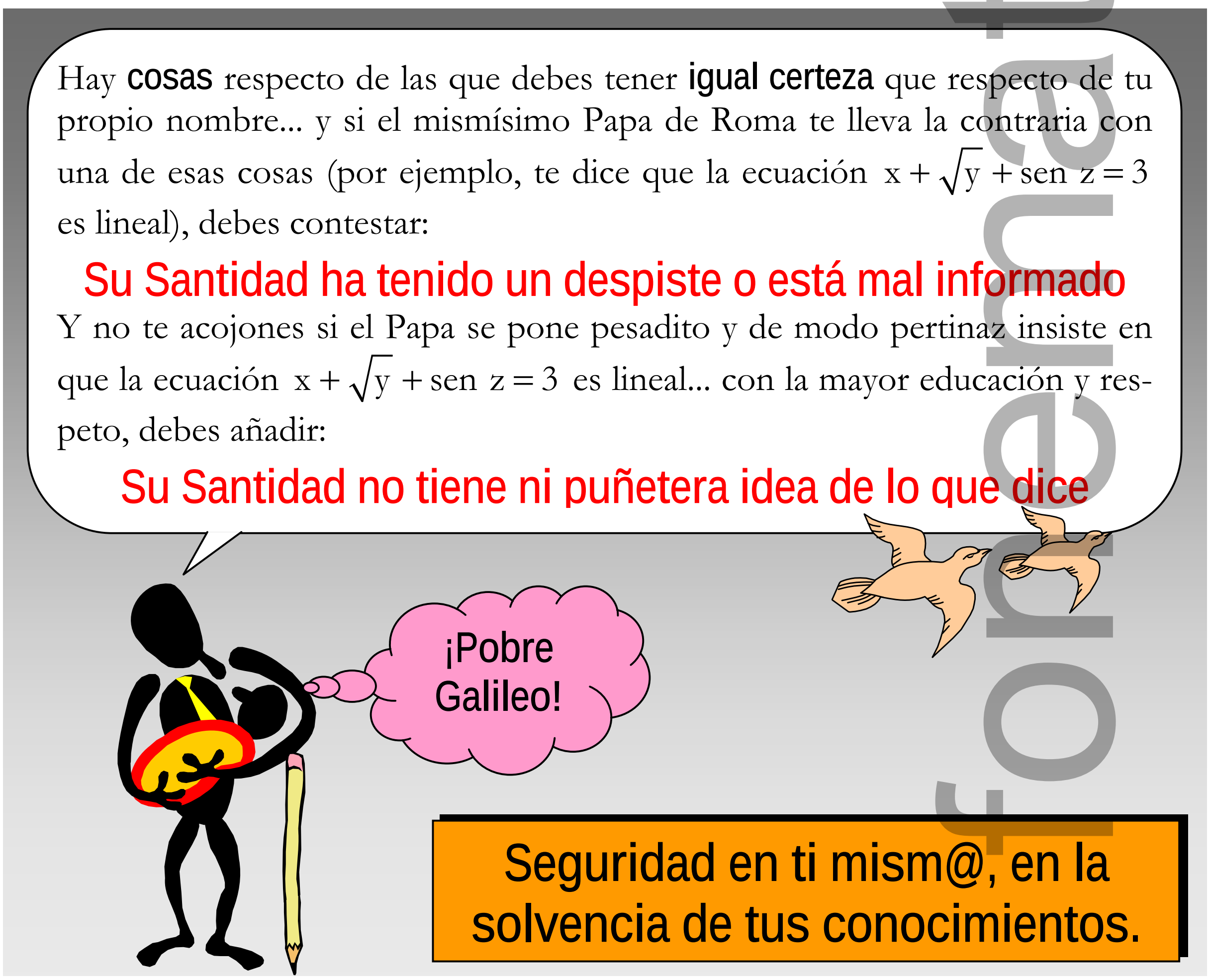
SOLUCIÓN

Siendo "A" y "B" respectivamente las matrices de coeficientes y ampliada, será posible encontrar un sistema de 2 ecuaciones equivalente al dado si para todo valor de "a" es $rg(A) = rg(B) = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & a \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2, \forall a \in \Re$$

NOTA

El ejemplo propuesto es tan tonto que no hace falta andar con la puñeta de los rangos, pues salvo que seamos muy pardillos nos daremos cuenta de que la tercera ecuación del sistema es suma de las dos primeras; por tanto, nos apostamos la vida a que al eliminar la tercera ecuación obtenemos un sistema equivalente al dado.



FONEMATO 15

Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de "a" y "b":

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 2.y &= a \\ x + 3.y &= b \\ x + 4.y &= 2.a \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 4 & 2.a \end{bmatrix}$$

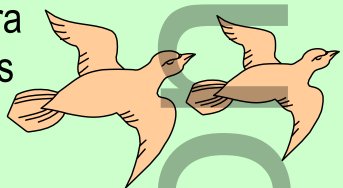
Como el menor de orden 2 indicado en "B" es no nulo, será $rg(B) = 2$ si son nulos los dos menores de orden 3 obtenidos al orlar el citado menor de orden 2; o sea, si:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b - 2.a + 1 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & 2.a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a = 2$ y $b = 3$ es $rg(A) = rg(B) = 2 =$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.
- Si $a \neq 2$ ó $b \neq 3$ es $rg(B) = 3 \neq rg(A)$, por lo que el sistema es incompatible.

OJO AL PARCHE: en todo examen de Álgebra hay una proporción no pequeña de almas cándidas que hablan del determinante de una matriz no cuadrada; incluso, no se sabe cómo, llegan a calcularlo. Naturalmente, si perpetras tan descomunal barbaridad, serás suspendido ipso facto ... y además serás objeto de todo tipo de rechiflas, porque tu profe congregará a toda su familia ante tu examen, y se pasarán la tarde tronchándose de tus conocimientos de Álgebra.



FONEMATO 16

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2.y + 2.z + 3.w = 6 \\ 2.x + 4.y + 3.z + 5.w = 10 \\ x + 2.y - z = 0 \end{cases}$$

Estudie su compatibilidad y resuélvalo usando determinantes

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Siendo $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la 3ª ecuación y parametrizamos "x" y "w", pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix} 2.y + 2.z = 6 - x - 3.w \\ 4.y + 3.z = 10 - 2.x - 5.w \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = (2 - x - w)/2 \\ z = 2 - w \end{cases}$$

Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(x;(2 - x - w)/2;2 - w;w), \forall\ x,w \in \Re\} \subset \Re^4$$

FONEMATO 17

Determine para qué valores del parámetro "a" tiene solución única el sistema

$$\begin{cases} 2.x - 3.y = 2 \\ 3.x - 3.y = a \\ 5.x + a.y = -13 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: un sistema lineal de ecuaciones tiene solución única si el rango de las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" coincide con el número de incógnitas del sistema.

Es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \\ 5 & a \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2, \forall\ a \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & a \\ 5 & a & -13 \end{bmatrix}$$

Será $rg(B) = 2$ si $\left| B \right| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & a \\ 5 & a & -13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2.a^2 + 9.a + 9 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -3/2 \\ -3 \end{cases}$$

FONEMATO 18

Estudie el siguiente sistema para los distintos valores de "a" y resuélvalo cuando sea posible

$$\begin{cases} 2.y - z = 6 \\ 3.x - 2.z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2.x + y - 4.z = a \end{cases}$$

SOLUCIÓN

El sistema es tan tontorrón que a partir de las ecuaciones primera y tercera se obtienes fácilmente los valores de "y" y "z":

$$\left.\begin{matrix} 2.y - z = 6 \\ y + z = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 4$ y $z = 2$ en la segunda ecuación resulta $x = 5$, y al sustituir en la cuarta ecuación se obtiene $2.5 + 4 - 4.2 = a \Rightarrow a = 6$.

En definitiva, el sistema es compatible sólo si $a = 6$, y en tal caso su única solución es $x = 5, y = 4, z = 2$.

FONEMATO 19

Estudie el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro real "a" y resuélvalo cuando sea compatible.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \ ; \ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 & a \\ -1 & -1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, el rango de "B" está determinado por el menor

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = 9.a$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3 \neq rg(A)$; por tanto, el sistema es incompatible.
- Si $a = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow rg(B) = 2 = rg(A) <$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos "z", pasándola los segundos miembros de las ecuaciones:

  $$\left\{\begin{matrix} 2.x - y = z \\ -x + 2.y = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

  Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = 0$, es:

  $$S = \{(z;z;z), \forall\ z \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 20

Discuta, según los valores de los parámetros λ y δ, el sistema

$$(\lambda+1).x+3.y+\lambda.z=1\ ;\ 3.x+(\lambda+1).y+2.z=\delta-1\ ;\ \lambda.x+2.y+\lambda.z=2$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 3 & \lambda\\ 3 & \lambda+1 & 2\\ \lambda & 2 & \lambda\end{bmatrix}$.

Como $|A|=\lambda^2-4$ sólo se anula si $\lambda=\pm2$, se tiene:

- Si $\lambda\neq\pm2$ es $rg(A)=3=rg(B)=$ número de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).
- Si $\lambda=2$ las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 3 & \boxed{\begin{matrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}}\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2 & \delta-1\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, el rango de "B" está determinado por el menor $H=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & \delta-1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=4-2.\delta$. Por tanto:

* Si $\delta\neq2\Rightarrow H\neq0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

* Si $\delta=2\Rightarrow H=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $\lambda=-2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\ 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}-2 & 2\end{matrix} & -2\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2 & \delta-1\\ -2 & 2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, el rango de "B" está determinado por el menor

$$W=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & -1 & \delta-1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=4+2.\delta$$

Por tanto:

* Si $\delta\neq-2\Rightarrow W\neq0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)$, y el sistema es incompatible.

* Si $\delta=-2\Rightarrow W=0\Rightarrow rg(B)=2=rg(A)<$ número de incógnitas; así, el sistema es compatible e indeterminado.

FONEMATO 21

Estudie el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro real "a" y resuélvalo cuando sea compatible

$$y + a.z = -a \;;\; x + a.y + z = 0 \;;\; x - a.y + a.z = 2$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -a & a \end{bmatrix}$.

Como $|A| = -2.a^2 - a + 1$ sólo se anula si $a = 1/2$ ó $a = -1$, se tiene:

- Si $a \neq 1/2$ y $a \neq -1$ es $rg(A) = 3 = rg(B) =$ número de incógnitas; así, el sistema tiene solución única (es compatible y determinado), que es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 2 & -a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots. \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots. \;;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots.$$

- Si $a = 1/2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

El menor de orden 3 indicado en "B" es no nulo, por lo que "B" tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Por ser $rg(B) = rg(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular las infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} y = 1 + z \\ x - y = -z \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Así, siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones cuando $a = -1$, es:

$$S = \{(1; 1 + z; z), \forall\, z \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 22

Determine la matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial

$$[x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

Calcula las soluciones de módulo 1.

SOLUCIÓN

Se tiene que:

$$[x \quad y \quad z] \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2.y + z = 0 \\ -2.x + y + 2.z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El SLH dado tiene infinitas soluciones, pues el rango de su matriz de coeficientes es inferior al número de incógnitas. Parametrizando "z", resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2.y = -z \\ -2.x + y = -2.z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3.z/5 \\ y = -4.z/5 \end{array} \right.$$

Siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones, es:

$$S = \{(3.z/5; -4.z/5; z),\ \forall\ z \in \Re\} \subset \Re^3$$

Como el módulo de la terna $(a;b;c)$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, entre las ternas de la forma $(3.z/5; -4.z/5; z)$, las que tienen módulo 1 corresponden al valor de "z" tal que:

$$\sqrt{(3.z/5)^2 + (-4.z/5)^2 + .z^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2.z^2} = 1 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

FONEMATO 23

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para los valores del parámetro real "a" que lo hagan compatible.

$$\begin{aligned} a.x + y + (a+1).z &= 0 \\ a.y + (a+1).z &= 0 \\ x + 2.z &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & a+1 \\ 0 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinemos los valores de "a" que anulan al determinante de "A":

$$|A| = 1 + a^2 = 0 \Rightarrow \text{carece de solución real}$$

Así, para cualquier valor real de "a" es $|A| \neq 0$; por tanto, para cualquier valor real de "a", es $rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas. En consecuencia, el sistema es compatible y determinado para cualquier valor del parámetro real "a". La única solución que tiene la obtenemos mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots \;;\; z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots$$

FONEMATO 24

1) Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius para decir cómo es el sistema

$$\begin{aligned} a.x + b.y + c.z &= a + b + c \\ b.x + c.y + a.z &= a + b + c \\ c.x + a.y + b.z &= a + b + c \end{aligned}$$

2) Encuentre una solución de dicho sistema.

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ compatible e indeterminado

En nuestro caso:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} a & b & c & a+b+c \\ b & c & a & a+b+c \\ c & a & b & a+b+c \end{bmatrix}$$

Para cualesquiera valores de "a", "b" y "c" es $rg(A) = rg(B)$, pues la cuarta columna de "B" es suma de las tres primeras; por tanto, el sistema siempre es compatible. Será compatible y determinado si $rg(A) = 3$ (o sea, $|A| \neq 0$), y será compatible e indeterminado si $rg(A) < 3$ (o sea, $|A| = 0$).

2) Nuestra proverbial astucia nos hace ver que, en cualquier caso, una solución del sistema es $x = y = z = 1$

Y entonces, ¿qué es el hombre por sí mismo, sino un insecto fútil que zumba mientras se estrella contra el cristal de una ventana? Y es que está ciego, no puede ver, ni puede darse cuenta de que hay algo entre él y la luz. Por eso se esfuerza, trabajosamente, en acercarse. Puede apartarse de la luz, pero no es capaz de llegar a estar más cerca. ¿Cómo le ayudará la ciencia? Puede llegar a conocer la consistencia y las irregularidades propias del cristal, comprobar que en una parte es más grueso, y en otra más fino, en una más basto y en otra más delicado: con todo esto, amable filósofo, ¿cuánto se ha acercado a la luz? ¿Cuánto ha aumentado sus posibilidades de ver? Puedo llegar a creer que el hombre de genio, el poeta, llega a romper, de algún modo, el cristal, hacia la luz, y siente la alegría y la tibieza que produce estar más allá que los demás hombres, pero, ¿no está, también él, ciego? ¿Acaso se ha acercado algo al conocimiento de la verdad eterna? Déjenme llevar más allá mi metáfora. Algunos se alejan de la cristalera en el sentido opuesto, hacia atrás, y gritan, al darse cuenta de que no chocan con el cristal, que no está tras ellos, “Hemos pasado”.

Fernando Pessoa

FONEMATO 25

1) Justifique en qué casos un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$.

2) Obtenga todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2.y + 3.z = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

1) Un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene alguna solución distinta de la trivial $(x = y = z = 0)$ siempre que la matriz de los coeficientes tenga rango inferior al número de incógnitas (3).

2) Latiguillo: estamos ante un sistema lineal homogéneo $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ siempre tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema siempre es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$. El sistema admitirá sólo la solución trivial o tendrá infinitas soluciones según que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual o sea inferior al número de incógnitas (o sea, 3). La matriz de los coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 < \text{número de incógnitas}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, parametrizamos la incógnita "z" y la pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x + y = -z \\ x + 2.y = -3.z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2.z \end{cases}$$

Siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(z; -2.z; z),\ \forall\ z \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

FONEMATO 26

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&1&-1\end{bmatrix}$

1) Calcule la inversa de A, la inversa de A^t y la de A^{-1}

2) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

$$A^t\bullet\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}\ ;\ A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet\text{Adj}(A)=\frac{1}{-3}\bullet\begin{bmatrix}-1&2&-2\\2&-7&4\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$|A|=-3$$

$$A^t=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-1&2&-2\\2&-7&4\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

- Es $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t=\frac{1}{-3}\bullet\begin{bmatrix}-1&2&-1\\2&-7&-1\\-2&4&1\end{bmatrix}$ y $(A^{-1})^{-1}=A$.

2) $$A^t\bullet\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=(A^t)^{-1}\bullet\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\bullet\begin{bmatrix}-1&2&-1\\2&-7&-1\\-2&4&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/3\\-7/3\\7/3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A\bullet\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&1&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\7\\13\end{bmatrix}$$

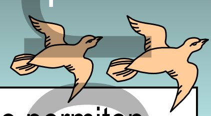
El uso de "ventanas", asunto esencial

Aprende a usar ventanas, porque facilitan mucho la lectura de lo escrito, y tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"



FONEMATO 27

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro "a":

$$\begin{aligned} 5.x + 3.y + 2.z + 4.t &= a \\ 2.x + y + z + t &= 2 \\ 3.x - y + z - t &= 1 \\ x + y + 2.t &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & a \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sucede que:

a la primera columna le restamos la segunda
a la cuarta columna le restamos el doble de la segunda

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; \forall \, a$$

desarrollamos por los elementos de la cuarta fila

Es $rg(A) = 3$, pues el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo.
El rango de "B" está determinado por el valor del menor

$$H = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & a-9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a-9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 21 - 3.a$$

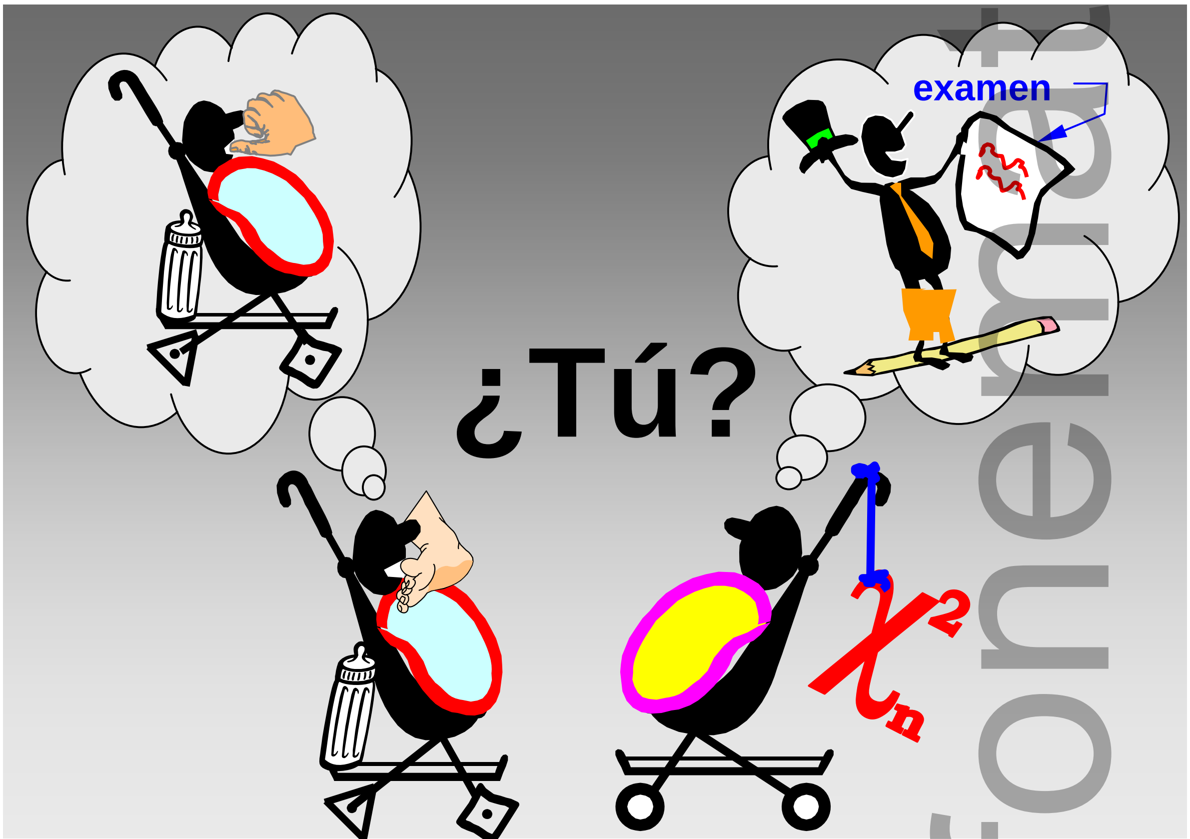
Por tanto:

- Si $a \neq 7 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 7 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la cuarta ecuación y parametrizamos la incógnita "t", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5.x+3.y+2.z=7-4.t \\ 2.x+y+z=2-t \\ 3.x-y+z=1+t \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 7-4.t & 3 & 2 \\ 2-t & 1 & 1 \\ 1+t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{5-2.t}{3} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 7-4.t & 2 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 3 & 1+t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{4-4.t}{3} \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7-4.t \\ 2 & 1 & 2-t \\ 3 & -1 & 1+t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{5.t-8}{3} \end{array}\right.$$

Así, siendo $S_{a=7}$ el conjunto de las infinitas soluciones del sistema cuando $a=7$, es:

$$S_{a=7}=\left\{\left(\frac{5-2.t}{3};\frac{4-4.t}{3};\frac{5.t-8}{3};t\right),\ \forall\ t\in\Re\right\}\subset\Re^4$$



FONEMATO 28

Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$a.x + b.y + 2.z = 1 \;;\; a.x + (2.b - 1).y + 3.z = 1 \;;\; a.x + b.y + 3.z = 2.b - 1$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} a & b & 2 \\ a & 2.b-1 & 3 \\ a & b & 3 \end{bmatrix}$.

Como $|A| = a.(b-1)$ sólo se anula si $a = 0$ ó $b = 1$, se tiene:

- Si $b \neq 1$ y $a \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $b = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \leq 2$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2, \forall\, a \;;\; B = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 2, \forall\, a$$

Como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $a = 0$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \leq 2$), es $B = \begin{bmatrix} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 2.b-1 & 3 & 1 \\ 0 & b & 3 & 2.b-1 \end{bmatrix}$.

Como $H = \begin{vmatrix} b & 2 & 1 \\ 2.b-1 & 3 & 1 \\ b & 3 & 2.b-1 \end{vmatrix} = -2.b^2 + 7.b - 5 = 0 \Rightarrow b = \begin{cases} 1 \\ 5/2 \end{cases}$, entonces:

∗ Si $b \neq 1$ y $b \neq 5/2 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 3 \neq \mathrm{rg}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible.

∗ Si $b = 1$, es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado.

∗ Si $b = 5/2$, es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5/2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(B) = 2$$

Como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

FONEMATO 29

Estudie la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvalo si $k=2$:

$$k.x+y+z=3 \ ; \ x-k.y+z=1 \ ; \ x+y+z=k+2$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $|A|=1-k^2$ sólo se anula si $k=\pm 1$, se tiene:

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2 \ ; \ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(B)=2$$

  Como $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=2 \ ; \ B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(B)=2$$

  Como $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

- Si $k=2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

  La única solución en tal caso, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=-1 \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=1 \ ; \ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=4$$

FONEMATO 30

Estudie para qué valores de "k" el siguiente sistema es compatible indeterminado, describiendo sus soluciones en tal caso

$$\begin{aligned} 6.x + 2.k.y + 3.z &= 1 \\ x - y + z &= 3 \\ 9.x - y + 6.k.z &= 10 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} 6 & 2.k & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 6.k \end{bmatrix}$, siendo:

$$|A| = 6.(5 - 3.k - 2.k^2) = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -5/2 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -5/2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $k = -5/2$ el sistema es incompatible, pues $rg(A) \neq rg(B)$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -15 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

- Si $k = 1$ las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 & -1 \end{matrix} & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;;\; B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & 6 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Si $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} 6.x + 2.y &= 1 - 3.z \\ x - y &= 3 - z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = (7 - 5.z)/8 \\ y = (3.z - 17)/8 \end{cases}$$

  Si $S_{k=-5/2}$ el conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=-5/2} = \left\{\left(\frac{7 - 5.z}{8}; \frac{3.z - 17}{8}; z\right), \forall\ z \in \Re\right\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 31

Discuta siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$x-y+z=2\ ;\ x+k.y+z=8\ ;\ k.x+y+k.z=10$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso: es $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&k&1\\k&1&k\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\1&k&1&8\\k&1&k&10\end{bmatrix}$

Sucede que para todo "k" es $|A|=0$, por lo que para todo "k" es $rg(A)<3$.

Es:

$$rg(B)=rg\underbrace{\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&k&8\\k&1&10\end{bmatrix}}_{W}$$

eliminamos la tercera columna de "B", pues es igual a la primera

Como $|W|=k^2-k-2$ se anula si $k=2$ ó $k=-1$, entonces:

- Si $k\neq 2$ y $k\neq -1\Rightarrow |W|\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ sistema incompatible.
- Si $k=-1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\1&-1&1&8\\-1&1&-1&10\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

  Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

- Si $k=2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\1&2&1&8\\2&1&2&10\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

  Como $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

Estudiar Matemáticas a muerte es la mejor gimnasia para desarrollar las habilidades que garantizan el éxito en las Carreras de Ciencias: disciplina mental, facultad de abstracción y capacidad de razonamiento.

LO DICEN TODOS LOS EVANGELIOS, INCLUSO LOS APÓCRIFOS

FONEMATO 32

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$\begin{aligned} x + y + z &= k + 1 \\ k.x + k.y + (k-1).z &= k \\ x + k.y + z &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k-1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$.

Determinemos los valores de "k" que anulan al determinante de "A":

$$|A| = k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Por tanto:

- Si $k \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) = \text{número de incógnitas}$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado; su única solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ k & k & k-1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ k & k & k-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots\ ;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ k & k & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \ldots$$

- Si $k = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

  Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

EL PROFESOR QUE CORRIGE TU EXAMEN

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en muchos casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, no hace falta ser un lince para entender que lo que escribamos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás... y para conseguir tal diferenciación basta escribir pensando que el profe que te ha de corregir no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano, explicándole todos los aspectos relevantes de las conexiones neuronales que establezcamos en cada caso.

FONEMATO 33

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$-x-k.z=k\ ;\ x+y+3.z=5\ ;\ 2.x+k.y=0$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -k\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & k & 0\end{bmatrix}\ ;\ |A|=5.k-k^2=0\Rightarrow k=\begin{cases}0\\5\end{cases}$$

- Si $k\neq 0$ y $k\neq 5 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado; su única nos la da Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}k & 0 & -k\\ 5 & 1 & 3\\ 0 & k & 0\end{vmatrix}}{|A|}=....\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & k & -k\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=....\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0 & k\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & k & 0\end{vmatrix}}{|A|}=....$$

- Si $k=0$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\3\end{matrix}\\ \begin{matrix}2 & 0\end{matrix} & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Siendo $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular las infinitas soluciones del sistema, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix}x=0\\ x+y=5-3.z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=5-3.z\end{cases}$$

Denotando $S_{k=0}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=0}=\{(0;5-3.z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=$$
$$=\{(0;5;0)+(0;-3.z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=$$
$$=\{(0;5;0)+z\bullet(0;-3;1),\ \forall\ z\in\Re\}\subset\Re^3$$

- Si $k=5$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

FONEMATO 34

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$x+y+z=1\ ;\ 2.x+y+k.z=1\ ;\ 4.x+y+k^2.z=k$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A)=rg(B)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A)=rg(B)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

La matriz "A" de los coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&k\\4&1&k^2\end{bmatrix}\ ;\ |A|=-k^2+3.k-2=0\Rightarrow k=\begin{cases}1\\2\end{cases}$$

- Si $k\neq 1$ y $k\neq 2\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado; su única solución la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&k\\k&1&k^2\end{vmatrix}}{|A|}=....\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&k\\4&k&k^2\end{vmatrix}}{|A|}=....\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\4&1&k\end{vmatrix}}{|A|}=....$$

- Si $k=1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&1\\2&1\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\\\begin{matrix}4&1\end{matrix}&1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&1\\4&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

Siendo $rg(A)=rg(B)=2<$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=1-z\\2.x+y=1-z\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1-z\end{cases}$$

Denotando $S_{k=1}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=1}=\{(0;1-z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=\{(0;1;0)+(0;-z;z),\ \forall\ z\in\Re\}=$$
$$=\{(0;1;0)+z\bullet(0;-1;1),\ \forall\ z\in\Re\}\subset\Re^3$$

- Si $k=2$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\4&1&4\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&2&1\\4&1&4&2\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=3$$

Como $rg(A)\neq rg(B)$, el sistema es incompatible.

FONEMATO 35

Discuta el siguiente sistema según los valores del parámetro "k", calculando sus infinitas soluciones cuando las tenga:

$$\begin{aligned} 2.x + k.y + z &= 2 \\ k.x - z &= 1 \\ x + y + 2.z &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B", el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $rg(A) = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $rg(A) = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Determinemos los valores de "k" que anulan el determinante de "A":

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; |A| = 2 - 2.k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

- Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.

- Siendo $k = 1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

  Siendo $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. Para calcular sus infinitas soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2.x + y &= 2 - z \\ x &= 1 + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= -3.z \end{aligned}\right.$$

  Denotando $S_{k=1}$ al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S_{k=1} = \left\{(1 + z; -3.z; z), \forall\, z \in \Re\right\} = \left\{(1;0;0) + z \bullet (1;-3;1), \forall\, z \in \Re\right\} \subset \Re^3$$

- Si $k = -1$, las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

  Como $rg(A) \neq rg(B)$, el sistema es incompatible.