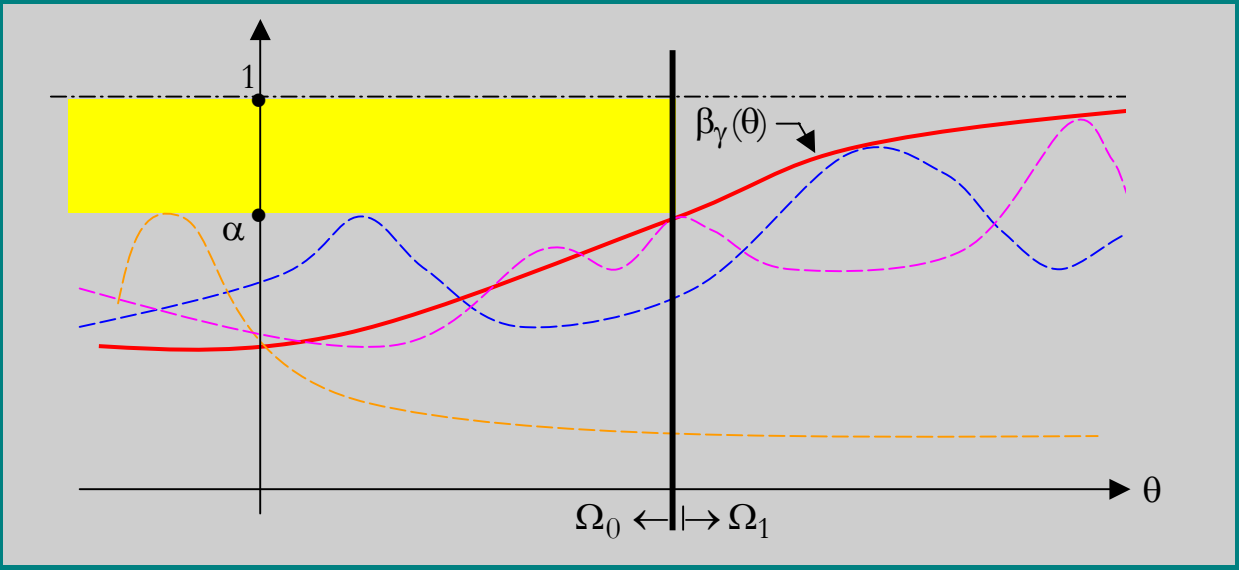
ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Volumen II

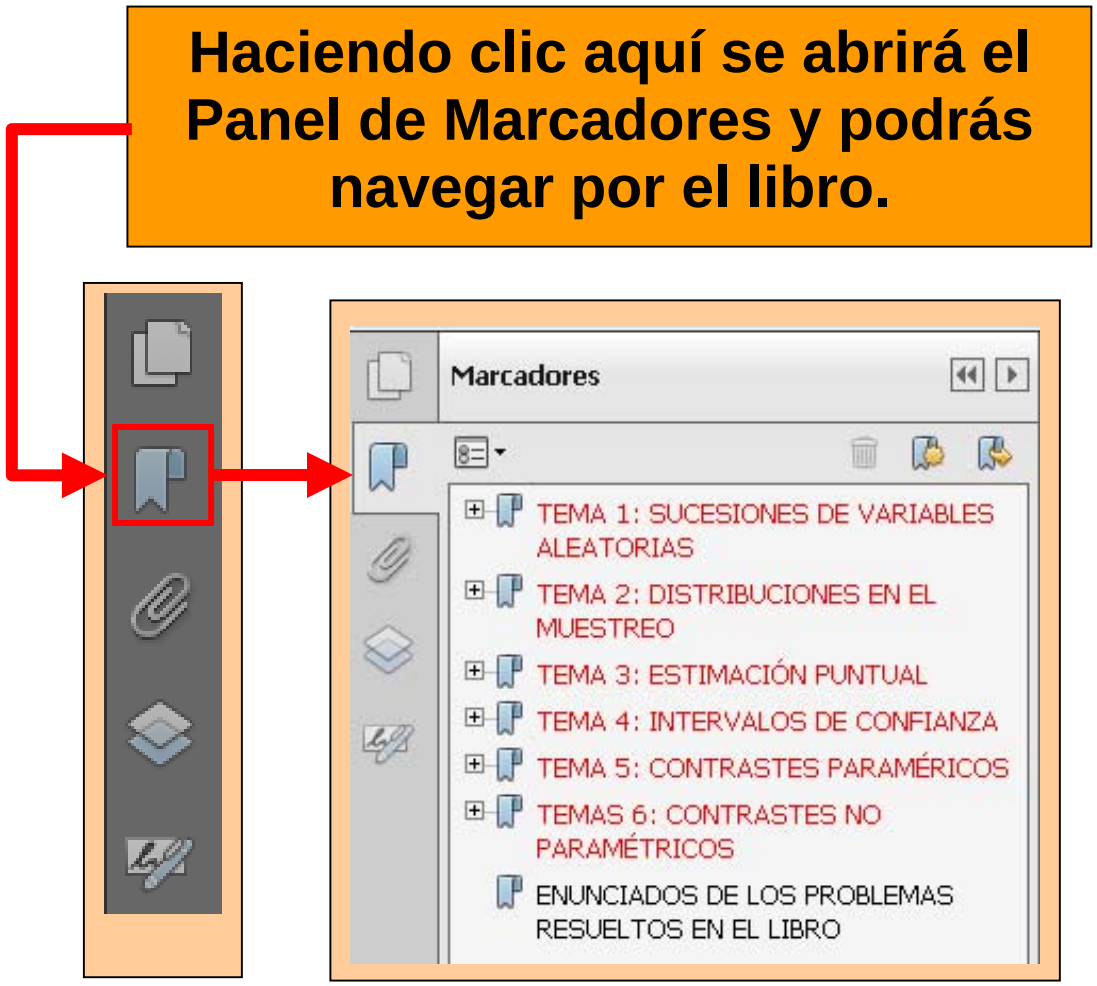
Inferencia Estadística



Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.



INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

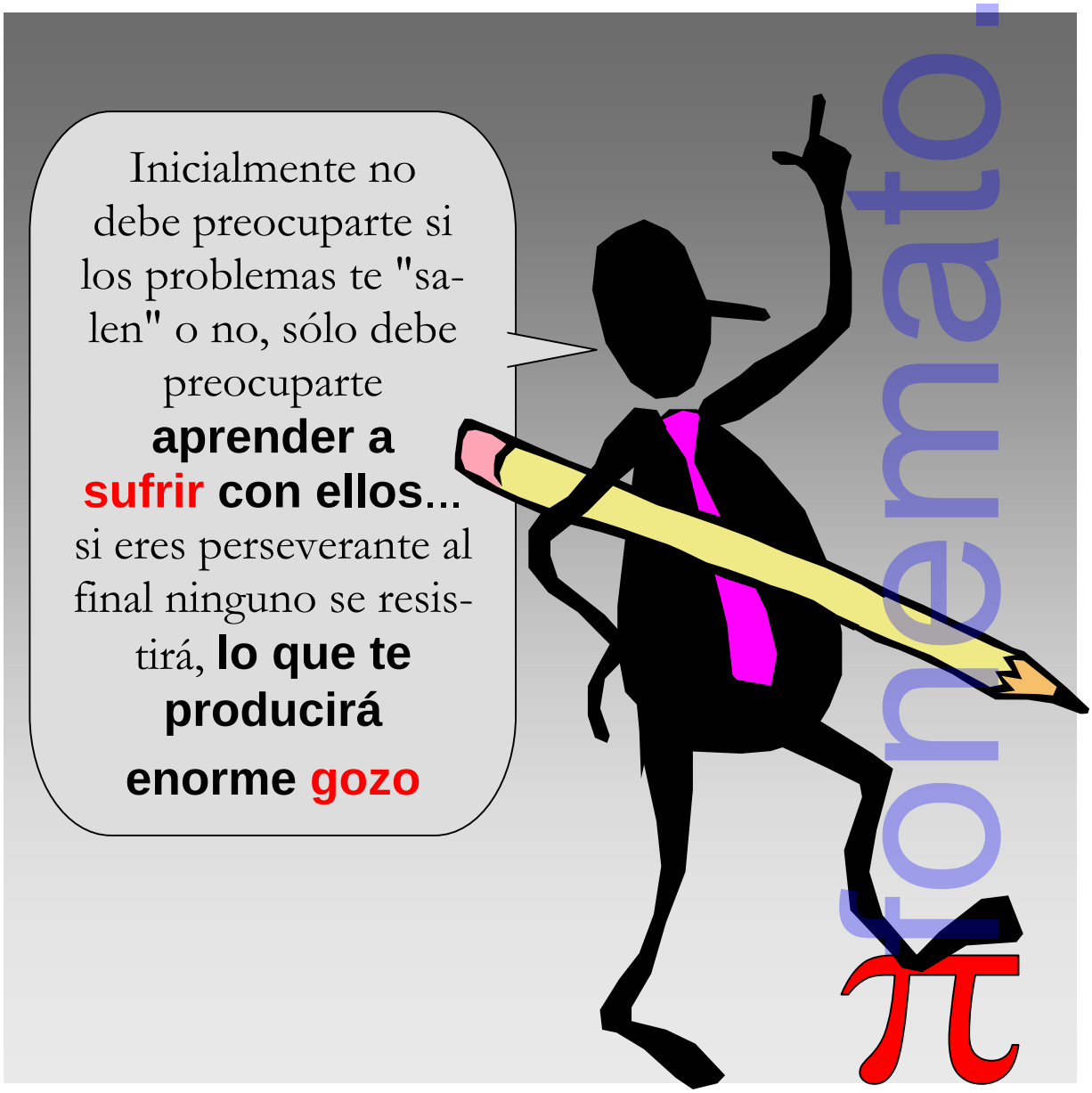
Volumen II: Inferencia Estadística

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

© RAFAEL CABREJAS HERNANSANZ

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS EN EL LIBRO

rinematato.com



© Rafael Cabrejas Hernansanz

Tema 1: Sucesiones de variables aleatorias

1.3.1: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0;a)$. Utilizando la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} a$, siendo:

$$Z_n = \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv 2.(\text{Media aritmética de } X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

1.3.2: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con las misma distribución de probabilidad, con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Utilizando la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \mu$, siendo Z_n la media aritmética de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Razónese si la anterior demostración es cierta si sólo exigimos que las variables de la sucesión $\{X_n\}$ sean incorreladas, no necesariamente igualmente distribuidas, aunque todas con la misma media y la misma varianza finitas.

1.3.3: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas densidad $f(x) = e^{-(x-\lambda)}$, $x > \lambda$. Siendo $Z_n = \text{mín.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, demuestre que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \lambda$,

1.3.4: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 1 y 0 con probabilidades respectivas $1/n$ y $1-1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$. ¿Qué ocurre con la convergencia de la funciones de distribución de las variables que forman la sucesión?

1.3.5: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 0 y n^2 con probabilidades respectivas $1-1/n$ y $1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$.

1.3.6: Sea $Z \approx U(-1;1)$ y $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$X_n = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < -1/n \\ 0 & \text{si } -1/n < Z < 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < Z < 1 \end{cases}$$

1) Calcúlese la función de distribución de X_n. A partir de ella, demuestre que la sucesión dada converge en ley a cualquier variable aleatoria que tome los valores -1 y 1 de modo equiprobable.

2) Sea "W" la variable aleatoria tal que $W = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < Z < 1 \end{cases}$

Pruébese que $\{X_n\} \xrightarrow{L} W$ y que $\{X_n\} \xrightarrow{2} W$.

1.3.7: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores "a" y $a + n.b$ $(b \neq 0)$ con probabilidades respectivas $1-1/n$ y $1/n$.

Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} a$. Estúdiese si $\{X_n\} \xrightarrow{2} a$.

fonendato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

1.4.1: Determínese el número "n" de veces que debe lanzarse una moneda para que no sea inferior a 0'8 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'45 y 0'55. ¿Cuántas veces debe lanzarse la moneda para que no sea inferior a 0'9 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'49 y 0'51?

1.4.2: La probabilidad de tránsitos en un aeropuerto se desconoce. Para estudiar la rentabilidad de una instalación hotelera en el aeropuerto, se estima dicha probabilidad mediante la frecuencia relativa de tránsitos respecto al total de viajeros del aeropuerto. Determínese el número "n" de pasajeros que deben observarse si se quiere que no sea mayor que 0'05 la probabilidad de que la desviación entre la frecuencia relativa de tránsitos y la probabilidad desconocida sea superior a 0'06.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

1.6.1: El número de muertos cada minuto a causa del hambre en una región alejada de nuestro idílico primer mundo tiene distribución de Poisson de parámetro 40, con independencia unos minutos de otros. Calcúlese la probabilidad de que durante el día de Nochebuena mueran de hambre no menos de 28800 personas en esa región. ¿Qué cota de muertos se superará ese día con probabilidad 0'95?

1.6.2: Con independencia unos días de otros, la aleatoria demanda diaria de vino (en litros) en un bar tiene distribución uniforme en el intervalo $(20;40)$. Calcúlese la probabilidad de que en 182 días se vendan más de 6370 litros de vino.

1.6.3: Al lanzar un dado 500 veces ganamos 100 $ por punto si sale cara par, y perdemos 100 $ por punto si sale cara impar. Calcúlese la probabilidad de ganar menos de 23000 $.

1.6.4: Con independencia unos de otros, el tiempo de espera de un cliente en la cola de un banco tiene distribución exponencial de parámetro 0'05. Calcúlese la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 2 clientes sea superior a 21, y la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 100 clientes sea superior a 21.

1.6.5: Con independencia unos días de otros, el aleatorio número de casos de corrupción que se descubren cada día tiene distribución de Poisson de parámetro 4. Calcúlese la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en dos días sea superior a 4'5, y la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en 100 días sea superior a 4'5,

1.6.6: Una máquina necesita para su funcionamiento una determinada válvula de la que hay en stock dos tipos A y B, en cantidades respectivas 220 y 300. Sin embargo, si empezamos a utilizar un tipo de válvula, ya no se puede mezclar ninguna del otro a no ser que paremos la máquina. La duración (en minutos) de cada válvula de tipo A es exponencial de media 5, mientras que la duración de cada válvula del tipo B tiene se distribuye (también minutos) de modo uniforme en el intervalo $(0;6)$. Además, se considera que la duración de cada válvula es independiente de la duración de las demás. Una vez averiada la válvula que hace funcionar la máquina, ésta es sustituida inmediatamente por otra del mismo tipo modo automático. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione ininterrumpidamente al menos 14'5 horas si trabaja con válvulas de tipo A? ¿Y si trabaja con válvulas de tipo B?

1.6.7: El tiempo (en horas) que tarda una máquina en realizar un ciclo de trabajo tiene densidad $f(x)=2.x,\ 0<x<1$. Calcúlese la probabilidad de que la máquina tarde mas de 40 horas en realizar 45 ciclos.

1.6.8: Determine el percentil 90 de la variable $X \approx \chi^2_{30}$ y compare el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

1.6.9: Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ variables independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con media 75 y varianza 225. Utilícese la desigualdad de Tchebychef para acotar la probabilidad de que su media aritmética no difiera de 75 en más de 6. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy. Mediante la desigualdad de Tchebychef, determínese la cota que

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendo.com

con probabilidad no inferior a 0'75 no es superada por la desviación de la media aritmética respecto a 75. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

1.6.10: El número de clientes que entran cada día a la farmacia "A" tiene distribución de Poisson de parámetro 20, y para la farmacia "B" tiene distribución B(30;0'7). Calcúlese la probabilidad de que el número medio diario de clientes de "A" durante 100 días se desvíe del número medio diario de clientes de "B" durante 200 días en menos de dos. ¿Qué cota no superará dicha desviación con probabilidad 0'95?

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

1.7.1: El 20 % de las ventas de una empresa son al contado. Si en un mes se realizan 1000 ventas, determínese la probabilidad de que como máximo 250 hayan sido al contado?

1.7.2: La probabilidad de que en una ciudad y durante un año en un parto nazca un varón es 0'48. Si la probabilidad de que nazcan 1000 o más varones es 0'1711, determínese el número "n" de nacimientos que se han producido en esa ciudad durante el año en cuestión

1.7.3: Con independencia unos días de otros, la aleatoria venta diaria de vino (en miles de litros) de una bodega tiene distribución $U(0;2)$, obteniendo beneficio la empresa sólo si la venta es superior a 1'5. Si se consideran 200 días, determínese el 60 percentil del número de días en que no se obtiene beneficio.

1.7.4: La probabilidad de que un estudiante se chupe el dedo hasta el codo es 0'7. Observados 300 estudiantes, determínese la probabilidad de que entre 230 y 250 contesten afirmativamente.

1.7.5: La duración (horas) de un tipo de fusible tiene distribución $N(2000;200)$. Los fusibles se empaquetan en lotes de 10, y se considera que un lote es defectuoso si contiene dos o más fusibles que duran menos de 1790 horas. Determínese la probabilidad de rechazar un embarque de 1000 lotes si se acepta cuando contiene menos de 150 lotes defectuosos.

fonematocon

© Rafael Cabrejas Hernansanz

Tema 2: Distribuciones en el muestreo

2.3.1: Se toma m.a.s de tamaño 2 de una población "X" tal que

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Determínese la distribución de probabilidad de los siguientes estadísticos:

$$1)\ T_1 = \overline{X}\ ;\ 2)\ T_2 = X_1 + X_2\ ;\ 3)\ T_3 = S^2\ ;\ 4)\ T_4 = S_c^2$$

$$5)\ T_5 = X_1 - X_2\ ;\ 6)\ T_2 = 2.X_1 - X_2\ ;\ T_7 = \text{máx.}(X_1; X_2)$$

2.3.2: Sea "X" una población continua de la que se toma m.a.s de tamaño "n". Determínese la distribución del mínimo valor muestral "Z", del máximo valor muestral "Y" y del recorrido muestral $R = Y - Z$. Aplíquese al caso $n = 3$ si la densidad de "X" es $f(x) = 2.x,\ x \in [0;1]$, determinando las probabilidades de los sucesos $Y \leq 0'1,\ Y > 0'9,\ Z \leq 0'1,\ Z > 0'9$ y $R \leq 0'5$.

2.3.3: En el muestreo aleatorio simple de tamaño 5 de una población exponencial de parámetro "a", determínese la distribución del recorrido muestral. Calcúlese la probabilidad de que el recorrido muestral sea mayor que 1.

2.3.4: Sea "X" una población continua de la que se toma m.a.s de tamaño impar $2.n + 1$. Determínese la distribución de la mediana muestral "M". Particularícese en el caso $n = 2$ si la densidad de "X" es $f(x) = 2.x,\ x \in [0;1]$. En las condiciones del apartado anterior, calcúlense la media y la varianza de "M".

2.3.5: Si se toma m.a.s de tamaño 9 de una población "X" con distribución uniforme en el intervalo $(0;1)$, determínese la distribución de probabilidad de la diferencia entre el sexto menor valor muestral y el tercer menor valor muestral.

2.3.6: De una población $X \approx N(0;\sigma)$ se toma m.a.s de tamaño 2. Demuéstrese que los estadísticos $Z = (X_1 + X_2)/2$ y $T = X_1^2 + X_2^2$ son incorrelados.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

2.4.1: Si el 70 % de los estudiantes se chupan el dedo y seleccionamos 100 estudiantes al azar, determínese la probabilidad de que la proporción de estudiantes que se chupan el dedo esté entre 0'65 y 0'8. Determínese un intervalo en el que con probabilidad 0'95 puede esperarse que se encuentre la proporción muestral de chupadedos.

2.4.2: De una población "X" se toma muestra aleatoria simple de tamaño 81. En los siguientes casos, determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el estadístico media muestral: Población de Poisson de parámetro 5. Población $B(4;0'3)$. Población Exp.$(0'02)$. Población $U(-1;1)$. Población con densidad $f(x)=2.x,\ 0\le x\le 1$. Población geométrica de parámetro 0'1. Población $G(20;2)$.

2.4.3: Si la producción diaria oscila entre 6000 y 10000 kg. Determínese la probabilidad de que la producción media durante 320 días supere los 8000 kg.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

2.5.1: Determínese la distribución de probabilidad de la varianza muestral en el muestreo aleatorio simple de tamaño 2 de una población $Z \approx U(0;1)$.

2.5.2: Determínese la distribución de probabilidad de la varianza muestral en el muestreo aleatorio simple de tamaño 2 de una población $Z \approx \text{Exp.}(1)$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

2.6.1: Una máquina de refrescos está regulada de modo que la cantidad de bebida que suministra tiene distribución normal con media 22'5 dl. y desviación típica 1'5 dl. Determínese la probabilidad de que al obtener una muestra de 36 bebidas, el contenido medio supere los 24 dl.

2.6.2: De una población normal de varianza 1000 se toma m.a.s. de tamaño 100. Determínese la probabilidad de que la media muestral supere a la media poblacional en no menos de 0'2.

2.6.3: Siendo $X \approx N(100;12)$, determínese el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para garantizar, con probabilidad no inferior a 0'95, que la media muestral no difiera de la media poblacional en más de 2 unidades.

2.6.4: Siendo $X \approx N(\mu;1)$, determínese el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para garantizar, con probabilidad no inferior a 0'95, que la media muestral no diferirá de la media poblacional en más de 0'5 unidades.

2.6.5: En horas, la duración de un tipo de bombillas es $N(1000;100)$. Se desea enviar un muestra de modo que la duración media muestral no difiera de la poblacional en más de 50 horas con probabilidad no inferior a 0'95. Determínese el tamaño de la muestra. Determínese el tamaño de la muestra si de "X" sólo se sabe que tiene media 1000 y desviación típica 100.

2.6.6: De una población $X \approx N(5;0'1)$ se toma m.a.s de tamaño 16. Determínese la probabilidad del suceso $5 < \overline{X} < 5'2$, la del suceso $S^2 \leq 0'019125$, la del suceso $S > 0'1$ y la del suceso $5 < \overline{X} < 5'2 / S^2 \leq 0'019125$.

2.6.7: De una población $X \approx N(13;6)$ se toma m.a.s de tamaño 9. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'99, que se encuentre la media muestral. Repita lo anterior si $n = 100$ y si $n = 10000$. ¿Qué diría si en una m.a.s de tamaño 10000 la media muestral es 15?

2.6.8: Si de una población $X \approx N(1'7;4)$ se toma m.a.s de tamaño 10, determínese la cota que superará la desviación típica muestral con probabilidad 0'99.

2.6.9: En el muestreo aleatorio simple de tamaño "n" de una población normal, determínese la función de densidad del estadístico varianza muestral.

2.6.10: En una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de una población $N(\mu;\sigma)$, siendo $\overline{X}$ y S^2 las correspondientes media y varianza muestrales, y siendo $X_{n+1} \approx N(\mu;\sigma)$ independiente de $X_1, \ldots, X_n$, determínese la distribución de probabilidad de "T", siendo:

$$T = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

2.6.11: De una población $X \approx N(\mu;2)$ se toma m.a.s de tamaño 9. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre la varianza muestral. Repita lo anterior si $n = 101$.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendo.com

2.6.12: De una población normal de varianza 4'5 se toman dos muestras independientes de tamaño "n". Determínese "n" de modo que sea al menos 0'95 la probabilidad de que las medias muestrales difieran en no más de 2 unidades.

2.6.13: De dos poblaciones independientes $N(\mu_1;\sigma_1)$ y $N(\mu_2;\sigma_2)$ se toman muestras de tamaños respectivos "n" y "m", siendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ las respectivas medias muestrales y S^2_{c1} y S^2_{c2} las cuasivarianzas muestrales. Determínese la distribución de probabilidad de los estadísticos T_1 y T_2:

$$T_1 = \frac{n-1}{\sigma_1^2}.S^2_{c1} + \frac{m-1}{\sigma_2^2}.S^2_{c2} \;\; ; \;\; T_2 = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n)+(\sigma_2^2/m)}}.\frac{\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{T_1}}$$

2.6.14: De dos poblaciones independientes con la misma varianza σ^2 se toman muestras de tamaños respectivos "n" y "m", siendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ las respectivas medias muestrales. Si $\overline{W}$ es la media aritmética de todas las observaciones realizadas, demuéstrese que $V(\overline{W}-\overline{X}) = m.\sigma^2/(n^2+n.m)$.

2.6.15: La duración media de las bombillas tipo A es de 2500 horas con desviación típica 600 horas, y la duración media de las bombillas tipo B es de 2300 horas con desviación típica 800 horas. Se toman 300 bombillas tipo A y 200 tipo B. Calcúlese la probabilidad de que la duración media de las bombillas tipo A no supere en más de 100 horas a la duración media de la del tipo B. Calcúlese la probabilidad de que la duración media de las bombillas tipo A supere en más de 200 horas a la duración media de la del tipo B. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre la diferencia de medias muestrales.

2.6.16: Sean S_1^2 y S_2^2 las respectivas varianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños 5 y 4 de dos poblaciones normales con igual varianza. Determínese la probabilidad del suceso $S_2^2/S_1^2 > 5'2$. Con los mismos tamaños muestrales, si las poblaciones son $N(3;2)$ y $N(7;8)$, determínese un intervalo en el que, con probabilidad 0'95, se encuentre el cociente de varianzas muestrales.

2.6.17: De una población normal bidimensional $(X;Y)$ con coeficiente de correlación $\rho = 0'5$ se toma m.a.s de tamaño 19, determínese la probabilidad de que el coeficiente de correlación muestral "r" esté entre 0'45 y 0'55.

2.6.18: Si de una población normal bidimensional $(X;Y)$ cuyo coeficiente de correlación es $\rho = 0'8$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño 28, determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el coeficiente de correlación muestral "r".

2.6.19: Si de una población normal bidimensional $(X;Y)$ cuyo coeficiente de correlación es $\rho = 0$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño 6, determínese la probabilidad de que el coeficiente de correlación muestral "r" esté entre 0'608 y 0'729. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el coeficiente de correlación muestral "r".

© Rafael Cabrejas Hernansanz

Tema 3: Estimación puntual

3.2.1: De una población "X" con media μ y varianza σ^2 se toma m.a.s. de tamaño "n". Demuéstrese que el estadístico media muestral siempre es estimador insesgado de la media poblacional μ. Demuéstrese que el estadístico varianza muestral no es estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2. Conocida μ, demuestre que el estadístico "T" es estimador insesgado de σ^2:

$$T = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 / n$$

3.2.2: Demuéstrese que, en una población uniforme en el intervalo $(a;b)$, el máximo muestral es asintóticamente insesgado para el extremo superior "b" y el mínimo muestral lo es para el extremo inferior "a".

3.2.3: Demuéstrese que si T_1 y T_2 son estimadores insesgados del parámetro θ, también es insesgado $Z = a.T_1 + (1-a).T_2$, $a \in (0;1)$. En una población con distribución uniforme en el intervalo $(0;\theta)$, analícese si el estadístico la media muestral es insesgado para θ. Determínese un estimador insesgado de θ.

3.2.4: Siendo "T" un estimador del parámetro θ, si es posible, determínese un estimador insesgado de θ en los siguientes casos:

$$1)\ E(T) = (\theta - 1)/(\theta + 1)\ ;\ 2)\ E(T) = p.\theta + q;\ p,q \in \Re,\ p \neq 0$$

3.2.5: Se toman dos muestras independientes de tamaños respectivos "n" y "m" de una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ cuya media quiere estimarse, siendo $\overline{X}$ y $\overline{Z}$ las respectivas medias muestrales. En la familia $W = a.\overline{X} + b.\overline{Z}$ $(a,b \in \Re)$, determínese el que es insesgado y tiene varianza mínima.

3.2.6: Se toma m.a.s de tamaño "n" de una población "X" cuya media quiere estimarse. Sea la familia de estimadores

$$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k.X_k\ ;\ a_k \in \Re,\ \forall k = 1,2,\ldots,n$$

Determínese el que es insesgado y tiene varianza mínima.

3.2.7: En el m.a.s. de tamaño "n" de una población "X" tal que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, sea "T" el cuadrado del estadístico media muestral. Determine el valor esperado de "T" en función de μ y σ^2. Imponga condiciones para que "T" sea estimador insesgado de σ^2. ¿Cuándo podría decirse que "T" es estimador insesgado de μ^2? ¿Es "T" asintóticamente insesgado para μ^2?

3.2.8: De una población "X" con varianza σ^2 sea toman "k" muestras independientes de tamaños respectivos $n_1,\ldots,n_k$. Siendo S_i^2 la varianza muestral de la i-ésima muestra, demuéstrese que "T" es estimador insesgado de σ^2.

$$T = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i.S_i^2\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\right)$$

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendo.com

3.2.9: De una población $X \approx N(0;\sigma)$ se toma m.a.s. de tamaño "n". Compruébese que "T" es estimador insesgado de σ^2.

$$T = \frac{1}{2.(n-1)} . \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

3.2.10: Siendo "X" el aleatorio número de estupideces que un ciudadano dice en un semestre e "Y" la aleatoria cantidad de horas que invierte en ver telebasura durante el semestre, demuéstrese que la covarianza muestral es un estimador asintóticamente insesgado de la covarianza poblacional.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

3.5.1: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.5.2: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.5.3: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro θ de una población $B(k;\theta)$.

3.5.4: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población geométrica.

3.5.5: Supuesto m.a.s. de tamaño dos, demuestre que la suma total es suficiente para el parámetro de una población exponencial y para la media de una normal.

3.5.6: De una población $X \approx U(0;\theta)$ se toma m.a.s. de tamaño dos. Demuéstrese que el máximo muestral es suficiente para θ.

3.5.7: De una población $X \approx U(\theta;3)$ se toma m.a.s. de tamaño dos. Demuéstrese que el mínimo muestral es suficiente para θ.

3.5.8: Supuesto m.a.s. de tamaño 2, demuéstrese que el mínimo muestral es suficiente para el parámetro θ si $f(x) = 3.\theta^3/x^4,\ 0 < \theta \leq x$

3.5.9: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro θ de una población $BN(k;\theta)$.

3.5.10: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.5.11: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.5.12: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población geométrica.

3.5.13: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población exponencial.

3.5.14: Analícese si el estadístico $T = 2.X_1 + X_2 + X_3$ es suficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.5.15: Determínese un estadístico suficiente para la media de una población normal.

3.5.16: Determínese un estadístico suficiente para la varianza de una población normal.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

3.6.1: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.6.2: Considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n" y siendo $X \approx B(k;p)$, demuéstrese que el estimador $T = \overline{X}/k$ es eficiente para "p".

3.6.3: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.6.4: Si $X \approx Exp.(1/\theta)$ y considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para θ.

3.6.5: Sea $X \approx N(\mu;\sigma)$ sometida a m.a.s de tamaño "n" para estimar la varianza σ^2. Compare la eficiencia de la cuasivarianza muestral con la de la varianza muestral. Estudie la eficiencia de la varianza muestral y la de la cuasivarianza muestral como estimadores de la varianza poblacional. Analícese la eficiencia de la varianza muestral como estimador de la función $h(\sigma^2) = (n-1).\sigma^2/n$.

3.6.6: De una población $X \approx Exp.(\theta)$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n". Sea el estadístico $Z = (n-1)/(n.\overline{X})$. Demuéstrese que "Z" es estimador insesgado de θ. Calcúlese la varianza de "Z". Calcúlese la CCR para estimadores insesgados de θ. Sabiendo que puede demostrarse que "Z" es el estimador insesgado de θ que tiene varianza mínima, ¿qué diría?

3.6.7: Considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para la media de una normal.

3.6.8: De una población se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n" y se define el estadístico $T = \sum X_i^2/n$. Determínese bajo qué condiciones "T" es estimador insesgado de la varianza poblacional. En tales condiciones, y supuesto que la población es normal, analícese la eficiencia de "T".

3.6.9: Sean T_1 y T_2 estimadores del parámetro λ. Se sabe que:

T_1 es insesgado y $V(T_1) = 0'08$; T_2 es sesgado y $V(T_2) = 0'01$

¿Cuál elegiríamos?

3.6.10: De una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 3 y se definen los siguientes estimadores de la media poblacional μ:

$T_1 = 0'6.X_1 + 0'2.X_2 + 0'2.X_3$; $T_2 = (4.X_3 - X_1)/3$; $T_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$

¿Cuál de ellos es mejor estimador de la media poblacional?

formatoo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

3.7.1: Si de una población se toma m.a.s. de tamaño "n", analícese la consistencia de la media muestral como estimador puntual de la media poblacional.

3.7.2: De una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ se toma m.a.s. de tamaño "n" y como estimador puntual de la media poblacional se elige el estadístico

$$T_n = k.\sum_{i=1}^{n} i.X_i$$

Determínese "k" para que T_n sea insesgado; en tal caso, analícese la eficiencia y la consistencia de T_n.

3.7.3: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de una población "X" tal que

x	−1	0	1
P(X = x)	(1 − θ)/2	1/2	θ/2

; $0 < \theta < 1$

Analícese la insesgadez y la consistencia de $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i$.

3.7.4: Supuesto m.a.s. de tamaño "n", analícese la consistencia simple de la varianza muestral y de la cuasivarianza muestral como estimadores de la varianza de una población normal.

3.7.5: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de $X \approx U(0;\theta)$, siendo $\overline{X}_n$ la media muestral, analice la consistencia de $T_n = 2.\overline{X}_n$ como estimador puntual de θ.

3.7.6: Utilizando la función de distribución, demuéstrese que la media muestral es consistente para la media de una población normal.

3.7.7: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de una población de Bernouilli de parámetro θ, y como estimadores puntuales de θ se eligen los estadísticos

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \;;\; Z_n = \frac{1}{n+2}.\left(1 + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno. Analícese la consistencia de $\overline{X}_n$. Analícese la consistencia de Z_n.

3.7.8: De una población logarítmico normal de parámetros μ y σ se toma m.a.s. de tamaño "n", y como estimador puntual de μ se elige el estadístico

$$T_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} \text{Ln}\, X_i$$

Analícese la insesgadez, la eficiencia y la consistencia de T_n.

3.7.9: De una población $X \approx U(0;\theta)$ se toma m.a.s. de tamaño $2.n+1$; siendo "M" la mediana muestral, analícese la insesgadez y la consistencia de $T = 2.M$ como estimador puntual de θ.

3.7.10: Si $X \approx G(b;1/\theta)$ y se conoce el valor de "b", demuestre que el estadístico $T = (X_1 + ... + X_n)/n.b$ es insesgado, consistente, eficiente y suficiente para θ.

3.7.11: Si de una población $X \approx U(0;\theta)$ se toma m.a.s. de tamaño "n", analícese la insesgadez y la consistencia del máximo muestral como estimador puntual de θ.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonematoteca.com

3.8.1: Sea "X" una población con densidad $f(x)=(1+\theta).x^{\theta}$, $0<x<1$. Determínese el estimador de θ por el método de los momentos.

3.8.2: Utilizando el método de los momentos, determínense los estimadores de los parámetros de una población normal "X".

3.8.3: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$(1-\theta)/2$	$(\theta+\lambda)/2$	$(1-\lambda)/2$

Determínense los estimadores θ y λ por el método de los momentos. Particularícese si en una muestra aleatoria simple de tamaño 50 los resultados fueron:

x	-1	0	1
n_i	15	25	10

¿Son insesgados los estimadores obtenidos?

3.8.4: Utilizando el método de los momentos, determínense los estimadores de los parámetros de una población gamma y los de los parámetros de una población beta.

3.8.5: Si $X \approx U(a;b)$, halle los estimadores "a" y "b" por el método de los momentos.

3.8.6: Determine el estimador de θ por el método de los momentos.

1) Población de Bernouilli de parámetro θ.
2) Población de $B(k;\theta)$, siendo conocido "k".
3) Población exponencial de parámetro θ.
4) Población geométrica de parámetro θ.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

3.9.1: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro de una población de Bernouilli.

3.9.2: Si de la población binomial de parámetros "k" (conocido) y "p" se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de "p"..

3.9.3: Si de una población geométrica de parámetro "p" se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de "p".

3.9.4: Si de la población binomial negativa de parámetros "k" (conocido) y "p" se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de "p".

3.9.5: Si de la población de Poisson de "θ" se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de "θ".

3.9.6: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de la media de una población normal cuya varianza se conoce.

3.9.7: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de la varianza de una población normal cuya media se conoce.

3.9.8: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínense las estimaciones más verosímiles de los parámetros de una población normal.

3.9.9: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro de una población exponencial.

3.9.10: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de una población exponencial de media θ.

3.9.11: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ en los siguientes casos:

1) Población "X" con densidad $f(x) = (1+\theta).x^{\theta}$, $0 < x < 1, \theta > 0$.

2) Población "X" con densidad $f(x) = \frac{3}{\theta}.x^2.e^{-x^3/\theta}$, $x > 0, \theta > 0$.

3) Población "X" con densidad $f(x) = \frac{4}{\theta^3.\sqrt{\pi}}.x^2.e^{-x^{`2}/\theta^2}$, $x > 0, \theta > 0$.

3.9.12: Estúdiese la consistencia y la eficiencia del estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ en una población "X" con distribución $G(2;1/\theta)$.

3.9.13: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

x	0	1	2
P(X = x)	$1-\theta$	$\theta/2$	$\theta/2$

Tomada muestra aleatoria simple de tamaño "n" y siendo $\overline{X}$ la aleatoria media muestral, como estimador de θ se define el estadístico $T = k.\overline{X}$. Determínese "k" para que "T" sea estimador insesgado de θ. ¿Es consistente? Determínese la estimación más verosímil de θ si en una m.a.s de tamaño 10 los resultados fueron

x	0	1	2
n_i	3	2	5

© Rafael Cabrejas Hernansanz

3.9.14: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de una población $G(r;\theta)$, suponiendo conocido "r".

3.9.15: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$(1-\theta)/2$	$(\theta+\lambda)/2$	$(1-\lambda)/2$

Determínense las estimaciones más verosímiles de θ y λ si en una m.a.s de tamaño 50 se observó 15 veces el -1, 25 veces el 0 y 10 veces el 1.

3.9.16: El precio de un producto para el conjunto de todos los mercados internacionales tiene distribución $N(\mu;2'5)$. Para los principales mercados europeos se dispone de estudios específicos que permiten una mayor precisión en los análisis. En concreto, para los mercados de Londres, París y Roma se ha comprobado que la media es idéntica que la mundial, pero las desviaciones típicas son distintas: el precio en Londres tiene distribución $N(\mu;2)$, el de París es $N(\mu;1)$ y el de Roma es $N(\mu;3)$. Determínese la estimación más verosímil de μ si en una muestra de tamaño tres formada por una observación de Londres, otra de París y otra de Roma los precios respectivos observados son 10, 12 y 8.

3.9.17: Determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de la población "X" cuya densidad es $f(x)=(2+\theta).x^{\theta+1}$, $0<x<1, \theta>0$.

3.9.18: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x)=\frac{1}{\theta}.(1-x)^{(1-\theta)/\theta} \;;\; 0<x<1 \;;\; \theta>0$$

Determínese la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud de θ, analizando su insesgadez, eficiencia, consistencia y suficiencia

3.9.19: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x)=\frac{2.\theta}{1-\theta}.x^{(3.\theta-1)/(1-\theta)} \;;\; 0<x<1 \;;\; 0<\theta<1$$

Determínese el estimador de máxima verosimilitud de θ. Determínese el estimador θ por el método de los momentos.

.

3.9.20: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x)=\theta.x^{\theta-1} \;;\; 0<x<1 \;;\; \theta>0$$

Determínese la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud de θ, analizando su insesgadez.

3.9.21: Se toma muestra de tamaño "n" de una población $(X;Y)$ con densidad

$$1)\; f(x;y)=\lambda.\theta.e^{-(\lambda.x+\theta.y)} \;;\; x>0 \;;\; y>0$$

$$2)\; f(x;y)=\theta^2.x^{\theta-1}.y^{\lambda-1} \;;\; 0<x<1 \;;\; 0<y<1$$

Determínense las estimaciones más verosímiles de λ y θ.

3.9.22: Una urna contiene 5 bolas, rojas y blancas. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 3 bolas con reposición resultan dos rojas y una blanca.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonemato.com

3.9.23: Una urna contiene 5 bolas, rojas, blancas y negras. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 4 bolas con reposición resultan dos rojas, una blanca y una negra.

3.9.24: Una urna contiene 6 bolas, blancas y negras. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 4 bolas sin reposición se obtienen en el orden blanca, blanca, negra, blanca.

3.9.25: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 3.\theta^3/x^4 \ ; \ 0 < \theta \leq x$$

Determínese la estimación más verosímil de θ, estudiando su sesgo. Estúdiese la insesgadez y la consistencia del estimador de momentos de θ.

3.9.26: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 2.x/\theta^2 \ ; \ 0 < x \leq \theta$$

Determínese la estimación más verosímil de θ, estudiando su sesgo y calculando su error cuadrático medio. Estúdiese la insesgadez y la consistencia del estimador de momentos de θ. ¿Es más eficiente que el de máxima verosimilitud?

3.9.27: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil de θ si $X \approx U(b;\theta)$ y si $X \approx U(\theta;c)$.

3.9.28: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \ ; \ 0 < \theta \leq x$$

Determínese la estimación más verosímil de θ, estudiando su sesgo. Calcúlese el estimador de momentos de θ.

3.9.29: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}.e^{-(x-\theta)/\lambda} \ ; \ 0 < \theta \leq x \ ; \ \lambda > 0$$

Determínense las estimaciones más verosímiles de λ y θ, estudiando su sesgo.

3.9.30: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 4.\theta^4.x^3 \ ; \ 0 < x \leq 1/\theta \ ; \ \theta > 0$$

Determínese la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud. Determínese un estimador insesgado de θ; calcúlese su varianza y compárese con la cota de Cramer-Rao para estimadores insesgados de θ.

3.9.31: Supuesto m.a.s de tamaño "n", y siendo $X \approx G(1/(1+\theta))$, $\theta > 0$, determínense los estimadores de θ por el método de los momentos y de la máxima verosimilitud. Estúdiese la insesgadez y la eficiencia de dichos estimadores.

3.9.32: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ de una población $X \approx U(\theta - 3;\theta + 2)$.

fonendo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.2.1: Empleando el método de Neyman y con muestra de tamaño uno, determínese un intervalo de confianza 0'95 para θ si $f(x)=2.(\theta-x)/\theta^2$, $0<x<\theta$.

4.2.2: Se toma muestra de tamaño 1 de una población con densidad

$$f(x)=\frac{2.\theta}{1-\theta}.x^{(3.\theta-1)/(1-\theta)}\ ;\ 0<x<1\ ;\ 0<\theta<1$$

Determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si el valor observado es 0'6.

4.2.2: Si de una población $X\approx Exp.(1/\theta)$ se toma muestra de tamaño 1, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si el valor observado es 2.

4.2.4: Demuéstrese que si $Y\approx G(k;a)$ y "k" es natural, $W=2.a.Y\approx\chi^2_{2k}$. De una población $X\approx G(2;1/\theta)$ se observa la muestra $(7;5;6)$. Determínese un intervalo de confianza 0'95 para θ.

4.2.5: Si de una población $X\approx Exp.(\theta)$ se toma muestra de tamaño 1, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'9$ si el valor observado es 0'2.

4.2.6: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x)=3.x^2/\theta^3\ ;\ 0\le x\le\theta$$

Determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si la muestra seleccionada es la $(4;3;7;8)$.

4.2.7: De una población $X\approx U(0;\theta)$ se observa la muestra $(4;7;6;5)$. Determínese un intervalo de confianza 0'9 para θ.

4.2.8: Se observa el valor 5 al tomar una muestra de tamaño 1 de una población "X" con densidad

$$f(x)=\frac{2}{3.\theta^2}.(\theta+x),\ 0<x<\theta,\theta>0$$

Utilícese el estimador de momentos de θ para determinar un intervalo de confianza 0'7269 para θ.

4.2.9: Supuesto muestra grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para el parámetro de una población dicotómica, particularizando al caso $\alpha=0'05$ si en una muestra de 64 estudiantes hay 16 que se chupan el dedo.

4.2.10: Si el número de exámenes de Estadística que suspende un alumno hasta aprobar esa asignatura tiene distribución de Poisson de parámetro θ, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ.
Particularícese al caso $1-\alpha=0'99$ si en una muestra de tamaño 100 se suspendieron 300 exámenes.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.3.1: La duración "X" de una tarta a la puerta de un colegio tiene distribución normal con 6 minutos de desviación típica. Determínese un intervalo de confianza del 99 % para la media poblacional si en una muestra de 100 colegios la duración media fue de 14'35 minutos. Analícese si puede aceptarse la hipótesis $E(X)=13$. ¿Puede aceptarse la hipótesis $E(X)=13$ con una confianza del 95 %? ¿En qué se modifica la solución si la variable "X" no es normal?

4.3.2: Un investigador estudia el tiempo medio de vida de un tipo de bacterias, buscando un intervalo de confianza del 95 % con amplitud 10. Si la población es normal de varianza 900, ¿qué tamaño muestral debe tomar? ¿Qué tamaño muestral debe tomarse si desea un intervalo de amplitud 10 con confianza 0'99? En una muestra de tamaño 100, ¿cuál es el máximo nivel de confianza que podemos tener en un intervalo de amplitud no superior a 6?

4.3.3: Determine la distribución de probabilidad de los extremos de un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para la media de una $N(\mu;\sigma)$ de varianza conocida.

4.3.4: El tiempo que tarda una máquina en producir una pieza es $N(10;2)$. Tras un ajuste que no afecta a la variabilidad del tiempo de fabricación, se toma m.a.s de tamaño 16 y se obtiene media muestral 9'7. Determínese el máximo nivel de confianza con que puede afirmarse que el ajuste disminuye el tiempo medio de fabricación.

4.3.5: La producción diaria de una máquina tiene distribución $N(20;5)$. Tras un ajuste que no afecta a la variabilidad de la producción, se toma m.a.s. de tamaño 25 y se obtiene una media muestral 21. Determínese el máximo nivel de confianza con el que puede afirmarse que el ajuste aumenta la producción media diaria.

4.3.6: Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la media de una población $N(\mu;2)$ de la que se han tomado tres muestras de tamaños respectivos 4, 8 y 24 obteniéndose medias muestrales 19, 19'5 y 19'2.

4.3.7: Determínese un intervalo de confianza 0'9 para la media de una población normal de la que, en una m.a.s. de tamaño 626, se ha obtenido la siguiente distribución de frecuencias:

Intervalo	Frecuencia
$20-24$	92
$24-28$	134
$28-32$	161
$32-36$	141
$36-40$	98

4.3.8: Determínese un intervalo de confianza 0'98 para la media de una población normal si en una m.a.s. de tamaño 101 la media muestral es 166 y la desviación típica muestral es 2'4.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.3.9: Las pruebas realizadas a 10 pacientes a los que se les administró un cierto somnífero para comprobar su eficacia dieron los siguientes resultados

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Horas ganadas de sueño	1'2	−1'3	0'7	0'2	3'4	0'8	3'1	1'8	2'0	3'1

Si el número de horas ganadas de sueño tiene distribución normal, ¿justificarían estos datos, con una confianza del 95 %, que el medicamento actúa aumentando las horas de sueño? Si en el prospecto del medicamento quiere indicarse el número medio de horas ganadas de sueño con un intervalo de amplitud 1 hora, indíquese la confianza que corresponde a ese intervalo. ¿A partir de qué nivel de confianza no puede decirse que el medicamento actúa aumentando las horas de sueño?

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.4.1: La demanda diaria de un artículo tiene distribución normal de media 98. Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la varianza poblacional si durante seis días las ventas han sido 95, 98, 100, 96, 98 y 99.

4.4.2: Determínese un intervalo de confianza 0'98 para la varianza de una población normal si se ha observado la muestra 2'70, 2'72, 2'70, 2'76, 2'74, 2'78, 2'73.

4.4.3: Al tomar m.a.s. de tamaño 201 de una población normal se ha obtenido

$$\sum_{i=1}^{201} X_i = 1809 \; ; \; \sum_{i=1}^{201} (X_i - \overline{X})^2 = 500$$

Determínese un intervalo de confianza 0'9 para la media poblacional y un intervalo de confianza 0'9 para la varianza poblacional.

4.4.4: Determínese un intervalo de confianza 0'96 para la varianza de una normal si se han tomado 5 muestras de tamaños respectivos 7, 5, 6, 8 y 9, siendo 150, 120, 190, 160 y 210 las correspondientes varianzas muestrales observadas.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.5.1: La empresa "A" fabrica un producto con demanda normal de varianza 40000, y la empresa "B" fabrica el mismo producto con demanda normal de varianza 10000. Observados 125 puntos de venta de cada producto, la demanda media de "A" es 300, siendo 290 la demanda media de "B". Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ entre las medias poblacionales. ¿Cuál es el máximo nivel de confianza para poder afirmar que $\mu_1 > \mu_2$? ¿Cuál es el máximo nivel de confianza en un intervalo de amplitud inferior a 40? ¿Qué tamaño muestral debe tomarse (el mismo en ambas poblaciones) para que la amplitud del intervalo de confianza 0'8 sea inferior a 30? ¿En qué se modifica la solución si las poblaciones no son normales?

4.5.2: Para comparar la resistencia de dos tipos de cables se ensayan 50 cables de cada tipo. Para el material "A" resulta una carga media de rotura de 78 kilos con desviación típica de 10 kilos, y para el "B" se observa una carga media de rotura de 87 kilos con desviación típica 20 kilos. Considerando que ambas poblaciones son normales de igual varianza, determínese un intervalo de confianza 0'95 para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ entre las medias poblacionales. ¿A qué nivel de confianza no puede decirse que $\mu_1 < \mu_2$? ¿Qué confianza puede tenerse en un intervalo de amplitud 3?

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.6.1: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura. Se sabe que la distribución de las notas en el grupo "A" es normal de media 6, y en el grupo "B" es normal de media 5. Al seleccionar una muestra de cada grupo se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo "A": 7, 6, 6, 4, 5, 5, 3, 2
Grupo "B": 6, 5, 4, 8, 3, 4, 3

Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el cociente entre las varianzas poblacionales.

4.6.2: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura. En las calificaciones de 15 alumnos del grupo "A" se observa varianza muestral 7, y en las calificaciones de 14 alumnos del grupo "B" la varianza muestral es 9. Supuesto que las calificaciones tienen distribución normal en ambos grupos, determínese un intervalo de confianza del 95 % para el cociente entre las varianzas poblacionales.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

4.8.1: Sea "X" una población con densidad $f(x) = (1+\theta).x^{\theta}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

Si el tamaño muestral es grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha = 0'95$ si la estimación más verosímil de θ correspondiente a una muestra de tamaño 400 es 2.

4.8.2: Sea $X \approx Exp.(1/\theta)$. Si el tamaño muestral es grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha = 0'95$ si la media muestral toma el valor 6 en una muestra de tamaño 2500.

4.8.3: Si la suma total toma el valor 800 en una muestra de tamaño 1600 de $X \approx B(5;\theta)$, determínese un intervalo aleatorio de confianza 0'95 para θ.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.4.1: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx N(\theta;10)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 3$ y la alternativa $H_1: \theta = 6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 100, y se elige el test cuya región crítica está formada por las muestras en que la media muestral toma un valor no inferior a 4. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.2: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx Exp.(\theta)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 1$ y la alternativa $H_1: \theta = 2$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 1, siendo γ_1 el test que rechaza la hipótesis nula si el valor observado es no superior a 0'105, y γ_2 el test que rechaza la hipótesis nula si el valor observado pertenece a $(0'053;0'347) \cup (0'399;1'498)$. En cada caso, calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II. ¿Qué test elegiríamos?

5.4.3: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx N(\theta;8)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 9$ y la alternativa $H_1: \theta = 6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 16, y se elige el test cuya región crítica está formada por las muestras en que la media muestral toma un valor no superior a 7. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.4: Sobre la proporción θ de pardillos en la Facultad se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'9$ y la alternativa $H_1: \theta = 0'6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 10, rechazándose la hipótesis nula si observan menos de 8 pardillos. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.5: Sobre el parámetro de una población $X \approx G(\theta)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'5$ y la alternativa $H_1: \theta = 0'2$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 20, rechazándose la hipótesis nula si la media muestral es superior a 3. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.6: El aleatorio número de hij@s de un tipo de familias tiene distribución $B(2;\theta)$, y sobre el parámetro θ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'2$ y la alternativa $H_1: \theta = 0'4$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 12, rechazándose la hipótesis nula si se observan al menos 7 hij@s. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.7: La duración de un fenómeno es exponencial de media θ, y se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 2$ y la alternativa $H_1: \theta = 5$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 2, rechazándose la hipótesis nula si la media muestral es superior a 3. Calcúlese la probabilidad de error tipo I y la probabilidad de error tipo II.

5.4.8: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx N(\theta;4)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 7$ y la alternativa $H_1: \theta = 8$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 9, y se elige el test cuya región crítica está formada por las muestras en que la media muestral toma un valor no inferior a "k". Determínese "k" de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'01.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendo.com

5.4.9: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx N(\theta;4)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 7$ y la alternativa $H_1: \theta = 6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 9, y se elige el test cuya región crítica está formada por las muestras en que la media muestral toma un valor no superior a "k". Determínense "k" de modo que la probabilidad de error tipo II sea 0'1.

5.4.10: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx N(\theta;4)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 5$ y la alternativa $H_1: \theta = 3$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño "n", y se elige el test cuya región crítica forman las muestras en que la media muestral toma un valor no superior a "k". Determínense "k" y "n" de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'05 y la de error tipo II sea 0'1.

5.4.11: La hipótesis nula establece que un dado de seis caras está equilibrado, y la hipótesis alternativa establece que las caras 5 y 6 están cargadas, de modo que la probabilidad de cada una de ellas es 0'3, siendo 0'1 la probabilidad de cada una de las restantes caras. Para contrastar estas hipótesis se lanza el dado una vez y se rechaza la hipótesis nula si se obtiene un 5 o un 6. Determínese la probabilidad de error tipo I y la de error tipo II.

5.4.12: Si la media muestral toma el valor 23 en una muestra de tamaño de 9 de una población $X \approx N(\theta;4)$, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 21$ frente a la alternativa $H_1: \theta = 25$ de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'01.

5.4.13: La media muestral toma el valor 47 en una muestra de tamaño de 81 de una población $X \approx N(\theta;18)$. Contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 50$ frente a la alternativa $H_1: \theta < 50$ de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'15.

5.4.14: La media muestral toma el valor 82 en una muestra de tamaño de 16 de una población $X \approx N(\theta;6)$. Contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 75$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 75$ de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'1.

5.4.15: La aleatoria duración de las bombillas tipo "A" tiene varianza 6400, y la aleatoria duración de las bombillas tipo "B" tiene varianza 8836. Se prueban 5000 bombillas de cada tipo, observándose vida media de 1282 horas para el tipo "A" y 1279 horas para el "B". Con probabilidad 0'05 de error tipo I, ¿puede aceptarse que los dos tipos son de la misma calidad?

5.4.16: La media muestral toma el valor 2 en una muestra de tamaño de 15 de una población $X \approx Exp.(\theta)$. Contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 3$ frente a la alternativa $H_1: \theta = 0'5$ de modo que la probabilidad de error tipo II sea 0'05.

5.4.17: La media muestral toma el valor 1'8 en una muestra tamaño de 3 de una población de Poisson de parámetro θ. Contraste la hipótesis nula $H_0: \theta = 2$ frente a la alternativa $H_1: \theta = 1$ de modo que la probabilidad de error tipo I sea 0'3.

fonendo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.6.1: Sobre el parámetro θ de una población de Bernouilli se establece la hipótesis nula $H_0: \theta \geq 0'8$ y la alternativa $H_1: \theta < 0'8$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 2 y se acepta la hipótesis nula si la suma total es 2. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test. Determínese la probabilidad de error tipo I si $\theta = 0'9$. Determínese la probabilidad de error tipo II si $\theta = 0'5$.

5.6.2: Sobre el parámetro θ de una población de Poisson se establece la hipótesis nula $H_0: \theta \geq 2$ y la alternativa $H_1: \theta < 2$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 4 y se elige el test que rechaza H_0 si la suma total no es superior a 1. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test. Determínese la probabilidad de error tipo I si $\theta = 3$ y si $\theta = 4$. Determínese la probabilidad de error tipo II si $\theta = 0'5$ y si $\theta = 1$.

5.6.3: Sobre el parámetro θ de una población $X \approx \text{Exp.}(\theta)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta \leq 1$ y la alternativa $H_1: \theta > 1$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño dos, siendo γ_1 y γ_2 los test cuyas respectivas regiones críticas son:

$$C_1 = \{(x_1; x_2) / x_1 \leq 1/2, x_2 \leq 1/2\}$$

$$C_2 = \{(x_1; x_2) / x_1 \leq \text{Ln}\,(e/(2.\sqrt{e} - 1)\}$$

En cada caso, determínense función de potencia y el nivel de significación. Indíquese qué test es mejor. Para cada test, calcúlese la probabilidad de error tipo I si $\theta = 0'8$ y la probabilidad de error tipo II si $\theta = 2$.

5.6.4: Sobre el parámetro θ de una población geométrica se establece la hipótesis nula $H_0: \theta \geq 0'6$ y la alternativa $H_1: \theta < 0'6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 2 y se elige el test que rechaza H_0 si la suma total no es inferior a 2. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.5: Siendo $X \approx BN(3;\theta)$, la hipótesis nula $H_0: \theta \leq 0'6$ y la alternativa $H_1: \theta > 0'6$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 2 y se elige el test que rechaza H_0 si la suma total es inferior a 2. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.6: Sea "X" una población con densidad $f(x) = \theta.x^{\theta-1}$, $0 < x < 1, \theta > 0$. Establecidas las hipótesis $H_0: \theta \geq 2$ y $H_1: \theta < 2$, para contrastarlas se toma muestra de tamaño 1 y se elige el test que rechaza H_0 si el valor observado es menor que 0'3. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.7: Sea "X" una población con densidad $f(x) = \dfrac{2.(\theta + x)}{3 + 2.\theta}$, $1 \leq x \leq 2, \theta \geq 0$.
Establecidas las hipótesis $H_0: \theta \leq 5$ y $H_1: \theta > 5$, para contrastarlas se toma muestra de tamaño 1 y se rechaza H_0 si el valor observado es mayor que 1'9. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonemato.com

5.6.8: Siendo $X \approx N(\theta;20)$, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta \leq 3$ y la alternativa $H_1: \theta > 3$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 100 y se rechaza H_0 si la media muestral no es inferior a 4. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.9: Siendo $X \approx N(\theta;20)$, se establecen las hipótesis $H_0: \theta = 0$ y $H_1: \theta \neq 0$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 100 y se rechaza H_0 si el valor absoluto de la media muestral es superior a 0'5. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.10: Sea "X" una población con densidad $f(x) = \theta.x^{\theta-1},\ 0 < x < 1, \theta > 0.$ Establecidas las hipótesis $H_0: \theta = 2$ y $H_1: \theta < 2$, para contrastarlas se toma muestra de tamaño 2 y se rechaza H_0 si la media muestral es menor que 0'3. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.11: Sea "X" una población con densidad $f(x) = e^{-(x-\theta)},\ 0 < \theta \leq x$. Establecidas las hipótesis $H_0: \theta \leq 4$ y $H_1: \theta > 4$, para contrastarlas se toma muestra de tamaño 3 y se rechaza H_0 si el mínimo muestral es mayor que 5. Determínense la función de potencia y el nivel de significación del test.

5.6.12: Sea "X" una población con densidad $f(x) = (1+\theta).x^{\theta};\ 0 \leq x \leq 1, \theta > 0.$ Establecidas la hipótesis nula $H_0: \theta = 1$ y la alternativa $H_1: \theta = 3$, para contrastarlas se toma muestra de tamaño dos, siendo γ_1, γ_2 y γ_3 los test cuyas respectivas regiones críticas son:

$$C_1 = \{(x_1;x_2) / 0 \leq x_1 \leq 0'1,\ 0 \leq x_2 \leq 0'1\}$$

$$C_2 = \{(x_1;x_2) / 0'9 < x_1 \leq 1,\ 0'9 < x_2 \leq 1\}$$

$$C_3 = \{(x_1;x_2) / 0'7 < x_1 \leq 0'8,\ 0'6 < x_2 \leq 0'7\}$$

Determínense el nivel de significación y la potencia de cada test. ¿Cuál es mejor?

5.6.13: Sobre el parámetro de una población $X \approx B(\theta)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'2$ y la alternativa $H_1: \theta = 0'3$. Para contrastarlas se toma muestra de tamaño 400 y se acepta H_0 si proporción de éxitos es menor que 0'25. Determínense el nivel de significación del test y su potencia.

fonematoteca

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.8.1: Siendo "X" una población con distribución de Poisson de parámetro θ, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Siendo $\alpha = 0'05$, particularícese al caso $\theta_0 = 25$ y $\theta_1 = 27$ si la media muestral toma el valor 26 en una muestra de tamaño 400. Siendo $\alpha = 0'05$, particularícese al caso $\theta_0 = 1'5$ y $\theta_1 = 2$ si la media muestral toma el valor 1'7 en una muestra de tamaño 10.

5.8.2: Siendo $X \approx N(\theta;\sigma)$ de varianza conocida, sobre θ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α.

5.8.3: Siendo $X \approx N(\mu;\sigma)$ un población de media conocida, se establece la hipótesis nula $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ y la alternativa $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Aplíquese al caso $X \approx N(5;\sigma)$, con $H_0: \sigma^2 = 1$ y $H_1: \sigma^2 = 4$ si la muestra seleccionada es la $(4;5;6;7)$ y $\alpha = 0'05$.

5.8.4: Siendo θ proporción de estudiantes que se chupan el dedo, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'5$ y $H_1: \theta = 0'7$ si $\alpha = 0'05$ y en una muestra de 100 estudiantes hay 65 que se chupan el dedo. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'5$ y $H_1: \theta = 0'7$ si $\alpha = 0'0625$ y en una muestra de 10 estudiantes hay 6 que se chupan el dedo.

5.8.5: Siendo θ el parámetro de una población geométrica, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'2$ y $H_1: \theta = 0'6$ si $\alpha = 0'05$ y en una muestra de tamaño 100 se observan 350 fracasos. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'8$ y $H_1: \theta = 0'4$ si $\alpha = 0'01696$ y en una muestra de tamaño 3 se observan 6 fracasos.

5.8.6: Siendo θ el parámetro de una población exponencial, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 1$ y $H_1: \theta = 4$ si $\alpha = 0'05$ y la media muestral toma el valor 2'3 en una muestra de tamaño 81. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'5$ y $H_1: \theta = 0'2$ si $\alpha = 0'1$ y la media muestral toma el valor 2'3 en una muestra de tamaño 6.

fonendo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.8.7: Siendo θ la media de una población exponencial, se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 2$ y $H_1: \theta = 4$ si $\alpha = 0'05$ y la media muestral toma el valor 4'3 en una muestra de tamaño 81. Aplíquese al caso $H_0: \theta = 5$ y $H_1: \theta = 3$ si

5.8.8: Siendo conocido "r", sobre el parámetro θ de una población $X \approx G(r;\theta)$ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Tomada muestra de tamaño "n", determínese la mejor región crítica para contrastarlas con nivel de significación α. Si $r = 4$, aplíquese al caso $H_0: \theta = 2$ y $H_1: \theta = 5$ si $\alpha = 0'05$ y la media muestral toma el valor 3'7 en una muestra de tamaño 100. Si $r = 2$, aplíquese al caso $H_0: \theta = 0'5$ y $H_1: \theta = 0'1$ si $\alpha = 0'01$ y la media muestral toma el valor 8'26 en una muestra de tamaño 7.

5.8.9: Sea "X" con densidad $f(x) = \dfrac{2.(\theta - x)}{2.\theta - 1}$, $0 \le x \le 1$. Mediante muestra de tamaño 1 y con nivel de significación 0'05, determínese el test más potente para contrastar la hipótesis nula $H_0: \theta = 1$ frente a la alternativa $H_1: \theta = 2$.

5.8.10: Sobre el parámetro θ de una población exponencial se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = \theta_0$ y la alternativa $H_1: \theta = \theta_1$. Determínense los valores de θ_0 y θ_1 si, con muestra de tamaño 1, el test más potente con nivel de significación 0'15 y probabilidad 0'6 de error tipo II rechaza la hipótesis nula cuando el valor observado es no superior a 0'054.

$\alpha = 0'3$ y en una muestra de tamaño 1 se observa el valor 3'21.

5.8.11: La hipótesis nula H_0 postula que la densidad de la población "X" es $f(x) = 2.(1 + x)/3$, $0 \le x \le 1$, y alternativa H_1 postula $g(x) = (1+2.x)/2$, $0 \le x \le 1$. Mediante muestra de tamaño 1 y con nivel de significación 0'1, determínese el test más potente para contrastarlas. Determínese la probabilidad de error tipo II.

5.8.12: Sea "X" una población con densidad $f(x) = \dfrac{1}{\theta}.(1 - x)^{(1-\theta)/\theta}$, $0 \le x \le 1$. Mediante muestra de tamaño 1 y con nivel de significación 0'05, determínese el test más potente para contrastar $H_0: \theta = 3$ frente a $H_1: \theta = 2$.

5.8.13: De una población $X \approx N(\theta;1)$ se toma muestra de tamaño 1 para contrastar la hipótesis $H_0: \theta = b$ frente a $H_1: \theta = 3.b$ con nivel de significación 0'05. Determínese "b" si la probabilidad de error tipo II es 0'1.

5.8.14: Sea "X" una población con densidad $f(x) = \theta.x^{\theta-1}$, $0 \le x \le 1$. Mediante muestra de tamaño 2 y con nivel de significación 0'05, determínese el test más potente para contrastar $H_0: \theta = 2$ frente a $H_1: \theta = 3$.

fonendo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.9.1: Sobre el parámetro de una población exponencial de media θ se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 2$ y la alternativa $H_0: \theta > 2$. Supuesto muestra de tamaño 1, determínese, si existe, el test uniformemente más potente de tamaño 0'05 para contrastar dichas hipótesis. Determínese la función de potencia del test. Analícese si el test es insesgado.

5.9.2: Sea $X \approx N(\theta;2)$. Sea la hipótesis nula $H_0: \theta = 1$ y la alternativa $H_1: \theta > 1$. Supuesto muestra de tamaño "n", determínese, si existe, el test uniformemente más potente (UMP) de tamaño α para contrastar dichas hipótesis. Determínese la función de potencia del test si $n = 100$ y $\alpha = 0'05$. Si existe, determínese el test UMP si $H_1: \theta < 1$. Si existe, determínese el test UMP si $H_1: \theta \neq 1$.

5.9.3: Sobre la proporción θ de estudiantes que apenas saben sumar con los dedos se establece la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'5$ y la alternativa $H_1: \theta < 0'5$. Supuesto muestra de tamaño 3, determínese, si existe, el test uniformemente más potente (UMP) de tamaño 0'125 para contrastar dichas hipótesis. Determínese la función de potencia del test. Analícese si el test es insesgado. Si existe, determínese el test UMP si $H_1: \theta > 0'5$. Si existe, determínese el test UMP si $H_1: \theta \neq 0'5$.

5.9.4: Sea "X" con densidad $f(x) = \theta.x^{\theta-1}$, $0 \leq x \leq 1, \theta > 0$. Con nivel de significación 0'1, contrástese $H_0: \theta = 2$ frente a $H_1: \theta > 2$ si en una muestra de tamaño 1 se ha observado el valor 0'7. Determínese la función de potencia del test, analizando si es insesgado. Analícese la existencia de un test UMP si $H_1: \theta \neq 2$.

5.9.5: Demuéstrese que $W = 2.X^k/\theta \approx \chi^2_2$, si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{k}{\theta}.x^{k-1}.e^{-x^k/\theta},\ x > 0,\ k > 0,\ \theta > 0$$

Determínese un estimador de θ que sea suficiente, insesgado, eficiente y consistente en media cuadrática. Determínese el estimador de θ por el método de la máxima verosimilitud. Determínese el estimador de θ por el método de los momentos. Determínese el test uniformemente más potente de tamaño α para contrastar $H_0: \theta = \theta_0$ frente a $H_1: \theta > \theta_0$. Particularícese para una muestra de tamaño 6 si $\alpha = 0'05$ y $\theta_0 = 100$, calculando la potencia del test si $\theta = 400$. Determínese un intervalo aleatorio de confianza 0'9 para θ.

5.9.6: Sea "X" una población con densidad

$$f(x) = 2.(\theta + x)/(2.\theta + 3),\ 1 \leq x \leq 2,\ \theta \geq 0$$

1) Mediante muestra de tamaño 1 y con nivel de significación 0'1, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 0$ frente a la alternativa $H_1: \theta > 0$.
2) Determínese la función de potencia y estúdiese si el test es insesgado.

fonendo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.10.1: Si se toma m.a.s tamaño "n" de $X \approx \text{Exp.}(\theta)$, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1: \theta < \theta_0$. Siendo $n = 100$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \geq 2$ frente a $H_1: \theta < 2$ si la suma total es 42.

5.10.2: Para muestra tamaño "n" de $X \approx \text{Exp.}(1/\theta)$, determine el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1: \theta < \theta_0$. Si $n = 100$ y $\alpha = 0'05$ contrástese $H_0: \theta \geq 2$ frente a $H_1: \theta < 2$ si la suma total es 165.

5.10.3: Para muestra tamaño "n" de una población $X \approx N(\theta; \sigma)$ cuya varianza se conoce, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1: \theta > \theta_0$. Si $n = 64$, $\sigma = 3$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \leq 5$ frente a $H_1: \theta > 5$ si la suma total es 422.

5.10.4: Para muestra tamaño "n" de una población $X \approx N(\theta; \sigma)$ cuya varianza se conoce, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1: \theta < \theta_0$. Si $n = 64$, $\sigma = 3$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \geq 5$ frente a $H_1: \theta < 5$ si la suma total es 310.

5.10.5: Para muestra de tamaño "n" de una población de Poisson de parámetro θ, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1: \theta < \theta_0$. Si $n = 100$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \geq 2$ frente a $H_1: \theta < 2$ si la suma total es 186.

5.10.6: Para muestra de tamaño "n" de una población de Bernouilli de parámetro θ, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1: \theta > \theta_0$. Si $n = 80$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \leq 0'2$ frente a $H_1: \theta > 0'2$ si la suma total es 17.

5.10.7: Para muestra de tamaño "n" de una población $X \approx N(\mu; \sqrt{\theta})$ cuya media se conoce, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1: \theta > \theta_0$. Si $\mu = 7$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \leq 2$ frente a $H_1: \theta > 2$ si se ha seleccionado la muestra $(4, 7, 9)$.

5.10.8: Para muestra de tamaño "n" de una población geométrica de parámetro θ, determínese el test UMP de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1: \theta < \theta_0$. Si $n = 80$ y $\alpha = 0'05$, contrástese $H_0: \theta \geq 0'2$ frente a $H_1: \theta < 0'2$ si la suma total es 390.

fonendato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.11.1: Sea θ la media de una población exponencial. Con nivel de significación 0'1, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 4$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 4$ si la media muestral toma el valor 3'2 en una muestra de tamaño 190.

5.11.2: Sea "X" una población de Poisson de media θ. Con nivel de significación 0'05, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 4$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 4$ si la media muestral toma el valor 4'1 en una muestra de tamaño 100.

5.11.3: Con nivel de significación 0'05, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'8$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 0'8$ si en una muestra de tamaño 100 de una población $X \approx B(\theta)$ se observan 81 éxitos.

5.11.4: Al tomar muestra de tamaño 100 de una población $X \approx G(\theta)$ se observan 350 fracasos. Con nivel de significación 0'1, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'2$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 0'2$.

5.11.5: La media muestral toma el valor 6 al tomar muestra de tamaño 100 de una población $X \approx Exp.(\theta)$. Con nivel de significación 0'1, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 0'2$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 0'2$.

5.11.6: La media muestral toma el valor 0'8 al tomar muestra de tamaño 100 de una población $X \approx G(2;\theta)$. Con nivel de significación 0'1, contrástese la hipótesis nula $H_0: \theta = 3$ frente a la alternativa $H_1: \theta \neq 3$.

5.11.7: Sea una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ de varianza conocida. Contrástese la hipótesis nula $H_0: \mu = a$ frente a la alternativa $H_1: \mu \neq a$ con nivel de significación α. Particularícese al caso $X \approx N(\mu;1)$ para $a = 3$ y $\alpha = 0'05$ si en una muestra de tamaño 81 la media muestral es 3'4.

5.11.8: Sea una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ de varianza desconocida. Contrástese la hipótesis nula $H_0: \mu = a$ frente a la alternativa $H_1: \mu \neq a$ con nivel de significación α. Particularícese al caso $a = 3$ y $\alpha = 0'1$ si en una muestra de tamaño 5 la media muestral es 3'4 y la varianza muestral 1'2.

5.11.9: Siendo $X \approx N(\mu_1;\sigma_1)$ y $Z \approx N(\mu_2;\sigma_2)$ de varianzas conocidas, contrástese la hipótesis nula $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ frente a la alternativa $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de significación α.

5.11.10: Siendo $X \approx N(\mu_1;\sigma)$ y $Z \approx N(\mu_2;\sigma)$ de varianza desconocida, contrástese la hipótesis nula $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ frente a la alternativa $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de significación α.

5.11.11: El número de muertos durante el ataque de un helicóptero Apache a un campo de refugiados palestinos tiene distribución de Poisson de parámetro μ_1, y si el ataque lo hace un caza F-18, el número de muertos tiene distribución de Poisson de parámetro μ_2. Si 100 ataques de Apache produjeron 600 muertos y 125 ataques de F-18 dejaron 775 cadáveres, contrástese la hipótesis nula $H_0: \mu_1 = \mu_2$ frente a la alternativa $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. Nivel de significación 0'1.

© Rafael Cabrejas Hernansanz
ronenato.com

5.11.12: Con nivel de significación 0'1, contrástese la igualdad entre la proporción de hombres y mujeres que fuman si en muestras respectivas de tamaños 100 y 150 se observaron 40 y 50 fumadores.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

5.12.1: Una máquina se ajusta de modo que la longitud de las piezas que fabrica tenga distribución $N(4;0'5)$, y en una muestra de tamaño 16 la media muestral es 4'2. Con nivel de significación 0'2, ¿puede aceptarse que la máquina funciona correctamente? ¿Y con nivel de significación 0'05?

5.12.2: Una máquina se ajusta de modo que el peso "X" de las piezas que fabrica tenga distribución normal de media 4. Si en una muestra de tamaño 16 la media muestral es 4'2 y la varianza muestral es 2, contrástese si la máquina funciona correctamente, con nivel de significación 0'2.

5.12.3: De una población $N(8;\sigma)$ se toma la muestra 12, 11, 7, 9, 5, 10, 8, 9, 7. Con nivel de significación 0'1, ¿puede aceptarse que la varianza es 4?

5.12.4: De una población normal se toma la muestra 12, 11, 7, 9, 5, 10, 8, 9, 7. Con nivel de significación 0'1, ¿puede aceptarse que la varianza es 4?

5.12.5: La media muestral toma el valor 11'3 al tomar una muestra de tamaño 90 de una población $N(\mu_1;\sqrt{5})$, y toma el valor 8'8 al tomar una muestra de tamaño 80 de una población $N(\mu_2;\sqrt{6})$. ¿Puede aceptarse que $\mu_1-\mu_2=4$ con nivel de significación 0'2? ¿Y con nivel de significación 0'01?

5.12.6: La demanda diaria de botes de "Coca" en una ciudad es normal con varianza 1225, y la demanda de botes de "Pepsi" es normal con varianza 625. Durante 16 días, la demanda de "Coca" fue de 10700 botes, mientras que en 9 días se demandaron 6300 botes de "Pepsi". ¿Puede aceptarse la igualdad de las medias poblacionales con nivel de significación 0'05?

5.12.7: La demanda diaria de botes de "Coca" en una ciudad es normal, lo mismo que la demanda de botes de "Pepsi", teniendo ambas demandas igual variabilidad. Durante 16 días, la demanda de "Coca" fue de 10700 botes, con varianza muestral 800; y en 9 días se demandaron 6300 botes de "Pepsi", con varianza muestral 600. ¿Puede aceptarse la igualdad de las medias poblacionales con nivel de significación 0'1?

5.12.8: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura. La distribución de las notas en "A" es $N(6;\sigma_1)$, y en "B" es $N(5;\sigma_2)$. Al observar una muestra de cada grupo se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo "A": 7, 6, 6, 4, 5, 5, 3, 2
Grupo "B": 6, 5, 4, 8, 3, 4, 3

Con nivel de significación 0'1, ¿puede aceptarse que la variabilidad de las notas es la misma en ambos grupos?

5.12.9: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura, siendo normal la distribución de las notas en los dos grupos. Al observar una muestra de cada grupo se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo "A": 7, 6, 6, 4, 5, 5, 3, 2
Grupo "B": 6, 5, 4, 8, 3, 4, 3

Con nivel de significación 0'1, ¿puede aceptarse que la variabilidad de las notas es la misma en ambos grupos?

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendato.com

5.12.10: Por experiencia de muchos años, se sabe que la puntuación en un examen de aptitud para sexador de pollos tiene distribución N(30;6). Al año siguiente se decide variar el tipo de examen. Supuesto que la puntuación obtenida con el nuevo examen es normal y que corregidos 26 exámenes elegidos de modo aleatorio, la puntuación media es 32, con desviación típica 3'8, ¿puede afirmarse, con nivel de significación 0'05, que las puntuaciones de los dos exámenes tienen la misma media? ¿Y la misma varianza?.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

Tema 6: Contrastes no paramétricos

6.3.1: Al lanzar un dado 120 veces se obtuvieron los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	20	22	17	18	19	24

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que el dado está equilibrado?

6.3.2: Al hacer 200 observaciones del número de coches llegados al peaje de una autopista en un minuto se obtuvieron los siguientes resultados:

Llegadas en 1 minuto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Número de veces	6	15	40	42	37	30	10	9	5	3	2	1

Con nivel de significación 0'05, ¿puede asimilarse el fenómeno a uno de Poisson?

6.3.3: En una ciudad con 32000 familias, el censo de población da la siguiente distribución de familias según su tamaño:

Tamaño	1 - 2	3 - 4	5 - 6	≥ 7
Número de familias	9200	12400	6300	4100

Al tomar muestra de 600 familias se obtuvo la siguiente distribución por tamaño

Tamaño	1 - 2	3 - 4	5 - 6	≥ 7
Número de familias	190	260	100	50

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que la muestra es aleatoria?

6.3.4: En una muestra de 100 coches modelo 320 vendidos por BMW se obtuvieron las siguientes preferencias en lo que al color se refiere:

Color	Rojo	Negro	Azul	Verde
Número de coches	25	35	15	25

Con nivel de significación 0'1, ¿puede aceptarse que no hay diferencias en cuanto a la preferencia por un color u otro?

6.3.5: Una empresa efectúa descuentos a sus clientes de forma variable. Seleccionadas ala zar 400 operaciones de venta, se obtuvieron los siguientes resultados:

Descuento	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10
Número de veces	10	75	200	90	25

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que los descuentos tienen distribución normal?

6.3.6: Por razones de eficacia parlamentaria, las hormigas sólo tienen 4 partidos políticos A, B, C y D. Siendo $0 \leq p \leq 0'5$, según un modelo teórico, la proporción de simpatizantes de cada uno es:

Partido	A	B	C	D
Proporción de simpatizantes	p^2	$1-2.p$	p	$p.(1-p)$

Preguntadas 200 hormigas, se obtuvieron los siguientes resultados:

Partido	A	B	C	D
Simpatizantes	20	80	60	40

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse el modelo teórico en cuestión?

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

6.3.7: El artículo fabricado por una empresa está formado por dos piezas, y cada pieza puede presentar, independientemente de las demás, un solo defecto, bien de tipo "A" o de tipo "B", o no presentar defecto, con probabilidad "p", "q" y "r" respectivamente, siendo $p+q+r=1$. Al final de cada mes se extrae una muestra y se clasifican los artículos en 4 categorías: excelente (si no presenta defectos), bueno (si sólo presenta el defecto "A"), regular (si sólo presenta el defecto "B") y malo (si presenta los dos defectos). Determínese la distribución de probabilidad de la calidad de los artículos. 2) En una muestra de 435 artículos se observan las siguientes frecuencias:

Excelente	Bueno	Regular	Malo
176	182	60	17

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que $p=0'2645$, $q=0'0932$ y $r=0'6423$?

6.3.8: A continuación se presentan los datos de una muestra de las alturas de los presentados este año a la oposición de ordeñador de moscas:

175, 172, 177, 175, 168, 170, 166, 180, 178, 176

Si en años anteriores la altura era $N(174;2)$, ¿puede aceptarse, con significación 0'05, que ha habido un cambio en la distribución de la altura de los opositores?

6.3.9: A continuación se presentan los datos de una muestra de las alturas de los presentados a la oposición de vigilante nocturno de pulgones:

175, 172, 177, 175, 168, 170, 166, 180, 178, 176

Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que la altura de los opositores tiene distribución normal?

6.3.10: Un fabricante de ferrines valigerables emplea dos tipos de máquinas "A" y "B". Se toman muestras de ambas y se registra la longitud de las piezas, obteniéndose

	A	B
Número de piezas	21	21
$\overline{X}$	66	68
S^2	10	11

Determínese un intervalo de confianza 0'95 para el cociente de varianzas. Con nivel de significación 0'05, ¿puede aceptarse que no hay diferencia entre las medias de ambas poblaciones? Se cree que el tiempo, en minutos, que tarda en fabricarse un ferrín tiene distribución $U(5;10)$. Con nivel de significación 0'01, contrástese esa hipótesis si en una muestra se obtuvo 5'2, 7'3, 8'1, 9'2, 5'7, 6, 6'6, 7, 8'5, 7'3.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

6.5.1: En una muestra a 100 alumnos de la Facultad de Economía se ha obtenido la siguiente información sobre las calificaciones en Matemáticas en el primer año de Carrera y el Bachiller de procedencia del alumno (Ciencias o Letras):

	Suspenso	Aprobado	Notable	Sobresaliente
Ciencias	10	25	20	5
Letras	20	15	4	1

Con nivel de significación 0'05, hágase el contraste más oportuno.

6.5.2: Una aseguradora de automóviles desea saber si hay relación entre la edad de cada asegurado y el número de accidentes que el asegurado sufre al año. En una muestra de tamaño 700 se obtuvieron los siguientes resultados:

		NÚMERO DE ACCIDENTES AL AÑO				
		0	1	2	3	4
EDAD	≤ 20	20	10	50	70	80
	21-30	40	30	10	20	40
	31-40	60	20	10	10	10
	> 40	100	60	30	20	10

Con nivel de significación 0'05, hágase el contraste más oportuno.

6.5.3: La Secretaría de la Facultad publica un listado con el número de asignaturas aprobadas el curso anterior por los 469 alumnos matriculados en el primer curso; y la información puede resumirse en la siguiente tabla:

Asignaturas aprobadas	0	1	2	3	4	5	6
Número de alumnos	14	37	120	135	115	33	15

1) Con nivel de significación 0'05, ¿puede admitirse que el número de asignaturas que aprueba cada alumno tiene distribución binomial?
2) Para esos alumnos también se conoce la nota en la prueba de Selectividad

		Número de asignaturas aprobadas						
		0	1	2	3	4	5	6
Selectividad	< 7	10	30	108	89	35	5	0
	≥ 7	4	7	12	46	80	28	15

Con nivel de significación 0'05, ¿puede admitirse que la nota en Selectividad influye en el rendimiento universitario del alumno?

6.5.4: Con nivel de significación 0'05, contrástese si hay relación entre la edad de los consumidores y sus preferencias por tres tipos de productos del mercado, si en una muestra de tamaño 500 se obtuvieron los siguientes resultados:

Edad	Producto A	Producto B	Producto C
16-30	25	100	25
31-45	75	75	50
46-60	25	75	50

© Rafael Cabrejas Hernansanz
fonendoo

6.5.5: En una Universidad se efectuó un estudio sobre el alimento básico de la dieta de los estudiantes, dándoles a elegir entre carne, pescado y verduras. En una encuesta a 500 alumnos se obtuvieron los siguientes resultados:

	Mujeres	Hombres
Carne	100	120
Pescado	89	99
Verduras	61	31

1) Con nivel de significación 0'05, ¿puede admitirse que mujeres y hombres tienen iguales gustos alimentarios?

   A los que eligieron la tercera opción se les preguntó qué cantidad de verduras (en kilos) ingerían semanalmente, y resultó lo siguiente:

Mujeres	$\sum X_i = 86'4$	$\sum (X_i - \overline{X})^2 = 20$
Hombres	$\sum Y_j = 90'2$	$\sum (Y_j - \overline{Y})^2 = 15$

2) Supuesta normalidad en el consumo de verduras, para mujeres y hombres, determínese un intervalo de confianza 0'95 para el cociente de varianzas. ¿Puede aceptarse que las varianzas son iguales?
3) Con la información anterior, y significación 0'05, ¿puede aceptarse que la cantidad media consumida de verduras es la misma sin distinción de sexo?

6.5.6: A una oposición pueden presentarse tanto licenciados en Derecho como licenciados en Economía. Se sabe que, entre los de la primera licenciatura, los suspensos duplican a los aprobados; entre los economistas, los aprobados y los suspensos respectivamente triplican y duplican a los aprobados y suspensos de la otra licenciatura. ¿Cuántos licenciados en Derecho deberán aprobar para que, con significación 0'1, pueda aceptarse que no hay una relación significativa entre el tipo de licenciatura y la calificación en la oposición? Para corregir el test que forma parte del examen se emplea un lector, cuyo libro de instrucciones dice que el tiempo (en minutos) que emplea en corregir un examen es una variable exponencial de parámetro 7. Con nivel de significación 0'01, contrástese esa hipótesis si en una muestra de tamaño 500 se obtuvieron los siguientes resultados:

Intervalos	Frecuencias
(0;0'1]	225
(0'1;0'2]	127
(0'2;0'3]	49
(0'3;0'4]	15
(0'4;0'5]	15
(0'5;0'6]	17
(0'6;0'7]	16
> 0'7	6

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz