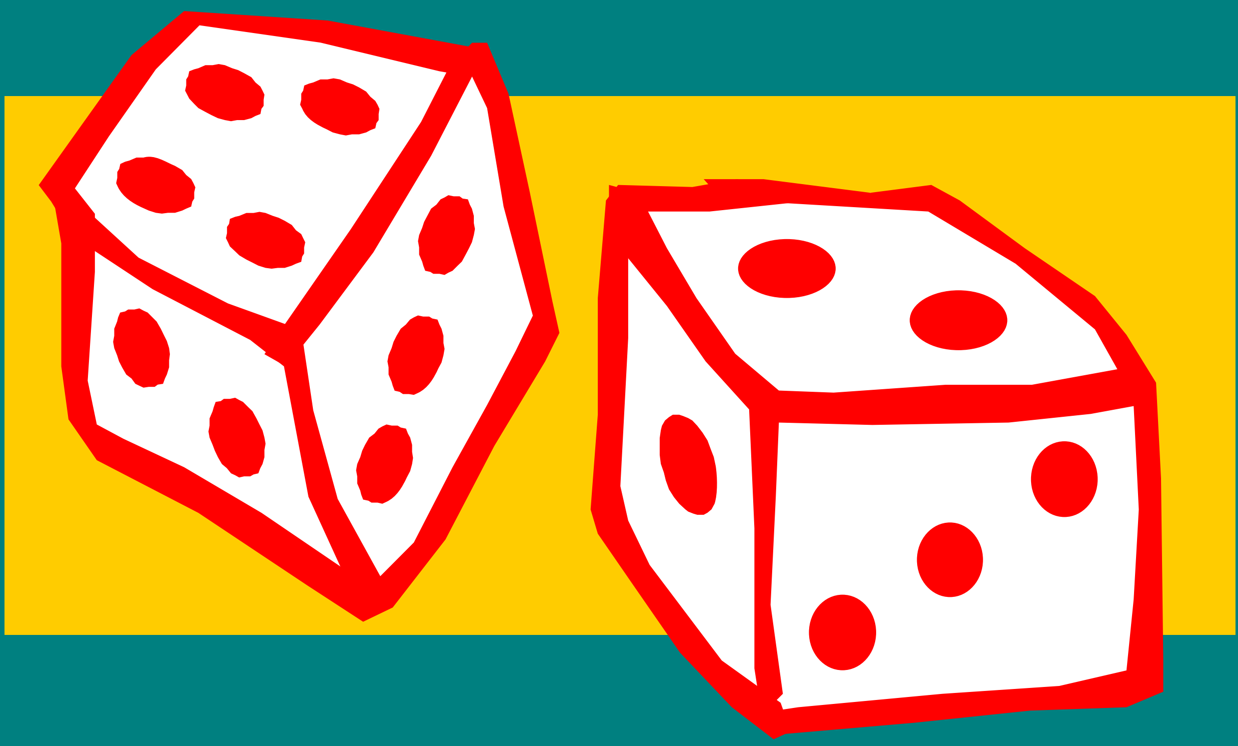
ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Volumen I

Distribuciones de probabilidad

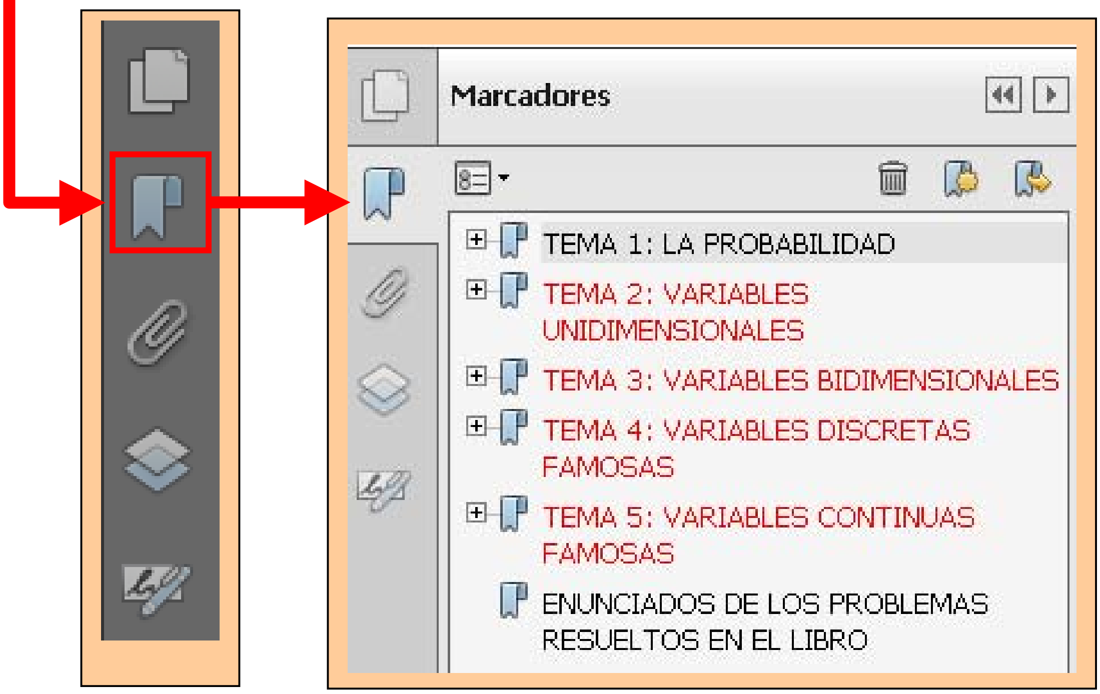


Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Volumen I: Distribuciones de probabilidad

La utilidad de este libro

Salvo que seas loco y estudies por gusto, si estás leyendo esto es porque debes enfrentarte al curso de introducción a la ***Estadística Matemática*** *(no confundir con Estadística Descriptiva) que se estudia en casi todas las Carreras de Ciencias.*

La primera utilidad *de este libro tiene que ver con tu examen de Estadística, pues en estas páginas encontrarás detallada información teórico-práctica sobre lo más relevante que "cabe" en un curso introductorio cuya carga lectiva oscila entre ocho y doce créditos.*

En el libro prima siempre lo intuitivo, pues al nivel que te la van a exigir, la Estadística se entiende con los ojos, casi no hace falta cerebro.

TEMARIO			Ejercicios resueltos
VOLUMEN I	1	La Probabilidad	58
	2	Variables aleatorias unidimensionales	104
	3	Variables aleatorias bidimensionales	66
	4	Variables unidimensionales discretas famosas	49
	5	Variables unidimensionales continuas famosas	90
VOLUMEN II	1	Sucesiones de variables aleatorias	23
	2	Distribuciones en el muestreo	30
	3	Estimación puntual	81
	4	Estimación mediante intervalo de confianza	29
	5	Contraste de hipótesis paramétricas	79
	6	Contraste de hipótesis no paramétricas	16

La segunda utilidad es más importante, *pues tiene que ver con el "arte" de sacar el máximo partido a lo poco o mucho que sepas; es decir,* ***el "arte" de deslumbrar a los profesores*** *que corregirán la solución que des a los montones de problemas que deberás lidiar en multitud de exámenes escritos sobre disciplinas que se expresan mediante números.*

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes es un petardo ..... porque no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a lectura y calificación de un montón de folios escritos por principiantes que mayoritariamente no entienden un pimiento y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez "cae" en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

El examen y los latiguillos

En la solución que en examen demos a un problema debemos escribir "cosas" que nos diferencien de los demás, y para eso hay que escribir pensando que el profesor no sabe resolver el problema, por lo que debemos explicarle los aspectos más relevantes del mismo. Es decir, en examen no debes conformarte sólo con hacer el "calculote" de los problemas; los problemas deben bordarse, y las agujas de bordar son los "latiguillos", que diferenciarán tu solución de las demás... y harán que "parezca" que sabes más.

Escúlpelo en tu cerebro: ***en un examen no importa lo que sabes... importa lo que parece que sabes***

Los latiguillos también protegen de los inevitables errores chorras de cálculo (nadie está libre de escribir 4–3 = 0 y así destrozar los cálculos de un problema): ***un profesor mentalmente equilibrado no te suspenderá por un error de cálculo si con los latiguillos le has vendido la moto de que sabes de qué hablas y entiendes la historia que llevas entre manos.***

¿Qué es un latiguillo?

Llamaremos latiguillo a todo párrafo corto o esquema que explique lo sustancial de los "asuntos" que tienen protagonismo relevante en un problema.

Lo mejor para ilustrarte es un ejemplo.

EJERCICIO

Si el 80 % de la población es morena y el 70 % tiene ojos oscuros, calcúlese la probabilidad de no ser moreno o tener los ojos claros.

SOLUCIÓN "ESCUPITAJO"

M = moreno y O = ojos oscuros:

$$P(\overline{M} \cup \overline{O}) = P(\overline{M \cap O}) = 1 - P(M \cap O) = 1 - 0'8.0'7 = 0'44$$

COMENTARIO

Es la solución del que no sabe sacar el máximo partido a sus conocimientos... *y pueden presentarse dos situaciones:*

1) *Si los cálculos son correctos, al profesor le asaltará la duda sobre si hemos copiado del vecino o sabemos realmente lo que estamos haciendo.*
2) *Si los cálculos no son correctos, el profesor nos pone un cero patatero, pues la solución sólo incluye números y los números están mal.*

SOLUCIÓN "PROFESIONAL"

Sea "M" el suceso de ser moreno y "O" el de tener ojos oscuros.
Suponemos que "M" y "O" son independientes (o sea, $P(M \cap O) = P(M).P(O)$), pues de lo contrario el ejercicio no puede hacerse, por desconocer $P(M \cap O)$.

El suceso de no ser moreno o tener los ojos claros es $\overline{M} \cup \overline{O}$, siendo:

leyes de Morgan

para todo suceso "W" es $P(\overline{W}) = 1 - P(W)$

$$P(\overline{M} \cup \overline{O}) = P(\overline{M \cap O}) = 1 - P(M \cap O) = 1 - 0'8.0'7 = \boxed{0'44}$$

$P(M \cap O) = P(M).P(O) = 0'8.0'7$

Latiguillo para rematar como torero de tronío: la frecuencia relativa del suceso $\overline{M} \cup \overline{O}$ en reiteradas realizaciones del experimento converge en probabilidad a 0'44; es decir, sin más que repetir el experimento un número bastante grande de veces, dicha frecuencia se aproxima a 0'44 tanto como se quiera.

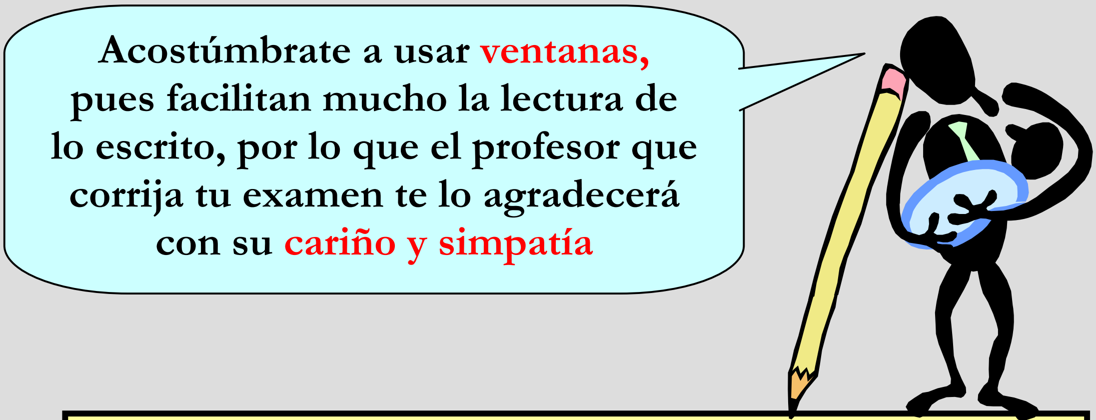
COMENTARIO

Es la solución del que sabe envolver el caramelo con primor: *los cálculos se adornan con "latiguillos" y explicaciones que evidencian la claridad (?) de nuestras ideas, además empleamos "ventanas" que facilitan la lectura de lo escrito... y también pueden presentarse dos situaciones:*

1) *Si los cálculos son correctos, el profesor que corrija el examen, quitándose el sombrero ante lo que hemos "escrito", nos pondrá un 10 ..... y será feliz durante unos instantes al comprobar que algunos alumnos sí entienden las cosas que él explica.*

2) *Si los cálculos no son correctos, el profesor (que también comete errores de cálculo, y lo sabe) pensará: ¡qué pena!, est@ alumn@ es de los pocos que evidencian que tienen las ideas perfectamente claras, pero a causa de su error de cálculo no le puedo dar un 10; no obstante, sería muy injusto tratarle como al de la solución "escupitajo", le daré un.... ¿6?, ¿un 7?, ¿un 5 pelao?, lo que sea, pero un aprobado.*

¡OJO!, TODO ERROR CONCEPTUAL ANULA EL EFECTO DE LOS LATIGUILLOS Y TE DEJA CON EL CULO AL AIRE.



Pedrusco "K" = Pedrusco "T"

VENTANA

Razonamientos o cálculos que permiten pasar de un lado a otro del "=" o de "⇒"

Pedrusco "K" ⇒ Pedrusco "T"

Indice del Volumen I
Distribuciones de probabilidad

Tema 1: La probabilidad

Tema 2: Variables unidimensionales

Indice del Volumen II
Inferencia Estadística

Tema 1: Sucesiones de variables

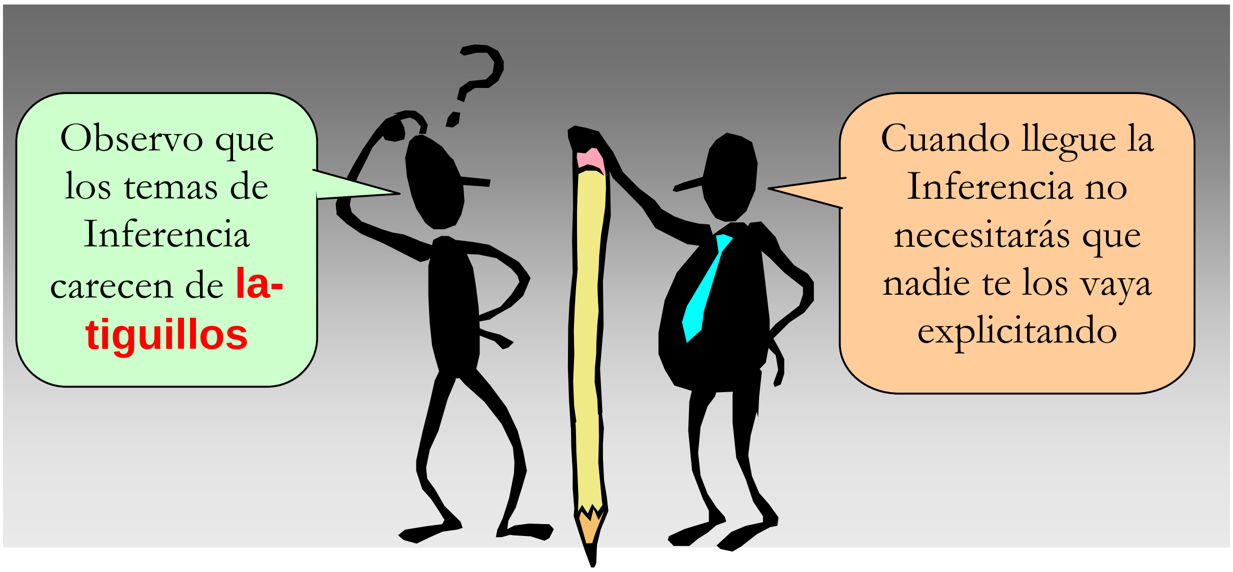
Tema 2: Distribuciones en el muestreo

Tema 3: Estimación puntual

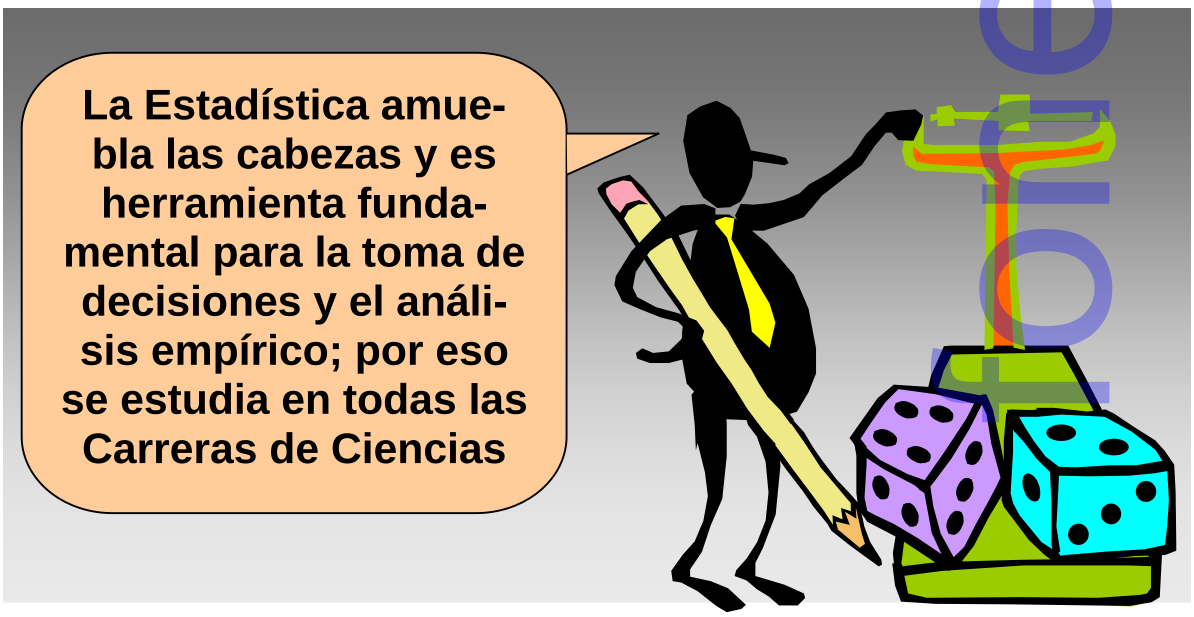
Tema 4: Intervalos de confianza

Tema 5: Contrastes paramétricos

Tema 6: Contrastes no paramétricos



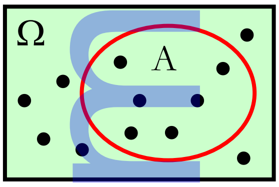
Tema 1
La Probabilidad



1.1 CONJUNTOS

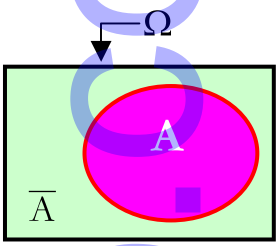
Como sabes, un **conjunto** es una colección de elementos o entes, ya sean tangibles o intangibles, con alas o sin ellas.

El conjunto que carece de elementos se llama **vacío** y se denota $\varnothing$.



Siendo Ω un conjunto, se llama **subconjunto** de Ω a todo conjunto (colección de elementos o entes) formado sólo por elementos de Ω.

Si "A" es un subconjunto de Ω, para denotarlo escribimos $A \subset \Omega$. Como nada impide que la colección "A" pueda carecer de elementos, el conjunto vacío $\varnothing$ es subconjunto de Ω, siendo obvio que Ω es subconjunto de sí mismo.



Siendo "A" un subconjunto de Ω, el **complementario** de "A" respecto de Ω se denota $\overline{A}$, y es el subconjunto de Ω que forman los elementos que no pertenecen a "A":

$$\overline{A} = \{c \in \Omega \,/\, c \notin A\}$$

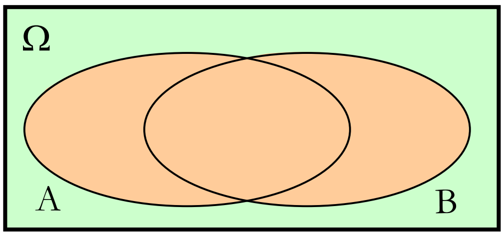
Evidentemente, el complementario de $\overline{A}$ es "A", el complementario de Ω es $\varnothing$, y el complementario de $\varnothing$ es Ω.

Siendo "A" y "B" subconjuntos de Ω, la **unión** de "A" y "B" se denota $A \cup B$, y es el conjunto que forman los elementos de Ω que pertenecen a "A" o a "B":

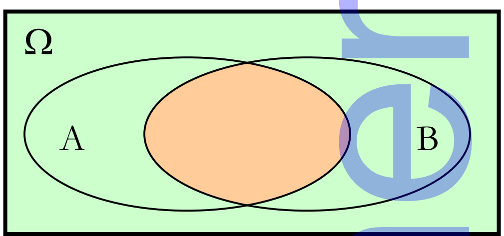
$$A \cup B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ ó } c \in B\}$$

La **intersección** de "A" y "B" se denota $A \cap B$, y es el conjunto que forman los elementos de Ω que pertenecen a "A" y a "B":

$$A \cap B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ y } c \in B\}$$



$$A \cup B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ ó } c \in B\}$$



$$A \cap B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ y } c \in B\}$$

Por ejemplo, siendo $\Omega = \{1, 7, \pi, 23, \nabla, \Delta\}$, son subconjuntos de Ω los siguientes conjuntos:

$$A = \{\pi, 23, \nabla, \Delta\} \subset \Omega \;;\; B = \{1, \Delta\} \subset \Omega$$

Y sucede que:

$$\overline{A} = \{c \in \Omega \,/\, c \notin A\} = \{1, 7\} \subset \Omega$$

$$\overline{B} = \{c \in \Omega \,/\, c \notin B\} = \{7, \pi, 23, \nabla\} \subset \Omega$$

$$A \cup B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ ó } c \in B\} = \{1, \pi, 23, \nabla, \Delta\} \subset \Omega$$

$$A \cap B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ y } c \in B\} = \{\Delta\} \subset \Omega$$

Propiedades

* Conmutativa:	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
* Asociativa:	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
* Idempotencia:	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
* Absorción:	$A\cup(A\cap B) = A$	$A\cap(A\cup B) = A$
* Distributiva:	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
*	$A\cup\varnothing = \varnothing\cup A = A$	$A\cap\Omega = \Omega\cap A = A$
*	$A\cup\overline{A} = \Omega$	$A\cap\overline{A} = \varnothing$
* Leyes de Morgan:	$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

1.2 ÁLGEBRA DE BOOLE DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

Siendo Ω un conjunto formado por un número finito de elementos, el **conjunto de las partes** de Ω se denota $\wp(\Omega)$, y es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de Ω.

Considera que en el conjunto $\wp(\Omega)$, que es una colección de conjuntos, hemos definido el complementario de un elemento de $\wp(\Omega)$ respecto de Ω y la unión y la intersección de elementos de $\wp(\Omega)$. En tal caso $\wp(\Omega)$ es un **álgebra de Boole** (llamado álgebra de Boole de las partes de Ω), pues satisface las exigencias que ha de cumplir toda colección finita de conjuntos para poder apellidarse álgebra de Boole; a saber:

$$\begin{array}{l} 1)\ \text{Si } A, B \in \wp(\Omega) \text{ sucede que } A \cup B \in \wp(\Omega) \\ 2)\ \text{Si } A \in \wp(\Omega) \text{ sucede que } \overline{A} \in \wp(\Omega) \end{array}$$

Por verificarse 1) y 2), también se verifica:

a) $\Omega \in \wp(\Omega)$. En efecto, si $A \in \wp(\Omega)$, debido a 2) es $\overline{A} \in \wp(\Omega)$, y debido a 1) sucede que $A \cup \overline{A} \in \wp(\Omega)$. Como $A \cup \overline{A} \in \Omega$, resulta que $\Omega \in \wp(\Omega)$.

b) $\varnothing \in \wp(\Omega)$. En efecto, como $\Omega \in \wp(\Omega)$, debido a 2) sucede que $\overline{\Omega} \in \wp(\Omega)$, y como $\overline{\Omega} = \varnothing$, resulta que $\varnothing \in \wp(\Omega)$.

c) $A \cap B \in \wp(\Omega)$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A \in \wp(\Omega) \\ \text{si } B \in \wp(\Omega) \end{array}\right\} \underset{\boxed{\text{debido a 2)}}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \overline{A} \in \wp(\Omega) \\ \overline{B} \in \wp(\Omega) \end{array}\right\} \underset{\boxed{\text{debido a 1)}}}{\Rightarrow} \overline{A} \cup \overline{B} \in \wp(\Omega) \Rightarrow$$

$$\underset{\boxed{\text{según Morgan, es } \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}}}{\Rightarrow} \overline{A \cap B} \in \wp(\Omega) \Rightarrow A \cap B \in \wp(\Omega)$$

d) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \wp(\Omega)$, aplicando reiteradamente 1), resulta:

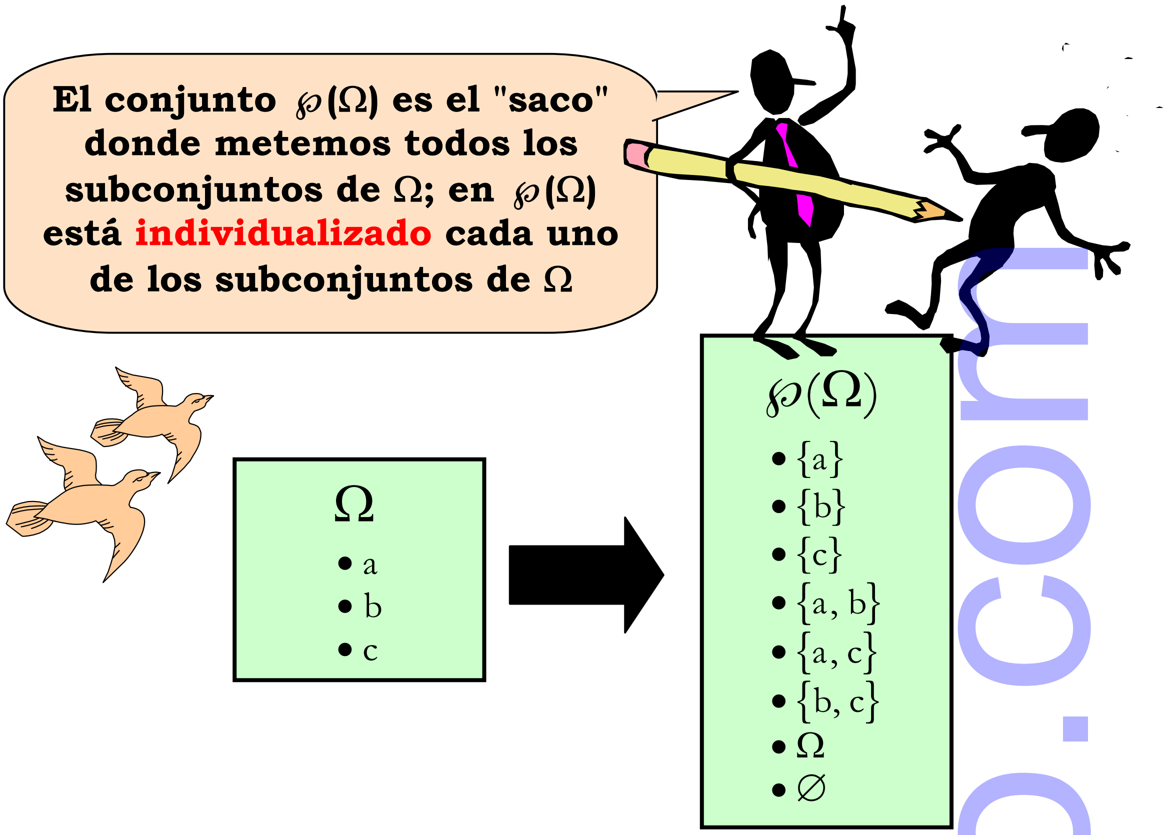
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \wp(\Omega)$$

e) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \wp(\Omega)$, aplicando reiteradamente c), resulta:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \wp(\Omega)$$

Por ejemplo, siendo $\Omega = \{a, b, c\}$, es:

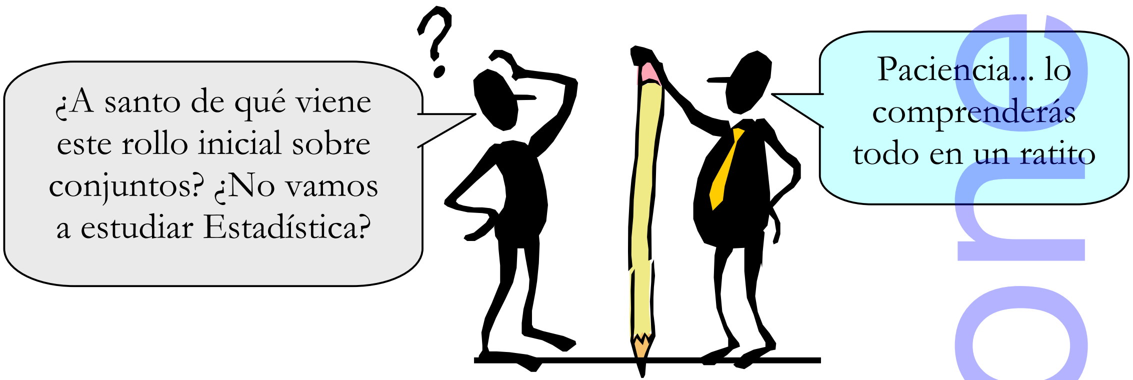
$$\wp(\Omega) = \{A \,/\, A \subset \Omega\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega, \varnothing\}$$



Si el conjunto Ω tiene infinitos elementos, el conjunto $\wp(\Omega)$ también tiene infinitos elementos. Tras definir en $\wp(\Omega)$ la unión, la intersección y el complementario, se dice que $\wp(\Omega)$ es un **σ–álgebra de Boole** (llamado σ–álgebra de Boole de las partes de Ω), pues satisface las exigencias que ha de cumplir toda colección infinita de conjuntos para poder apellidarse σ – álgebra de Boole", a saber:

$$1) \text{ Si } A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \wp(\Omega), \text{ sucede que } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \wp(\Omega)$$

$$2) \text{ Si } A \in \wp(\Omega), \text{ sucede que } \overline{A} \in \wp(\Omega)$$



1.3 EXPERIMENTO ALEATORIO

Un **experimento** es un proceso que se observa con el fin de establecer una relación entre las condiciones en que se realiza y los resultados que se obtienen.

Cabe clasificar los experimentos en dos categorías: deterministas y aleatorios.

Deterministas: son experimentos en que las condiciones de partida determinan plenamente el resultado; carecen de interés para la Estadística.

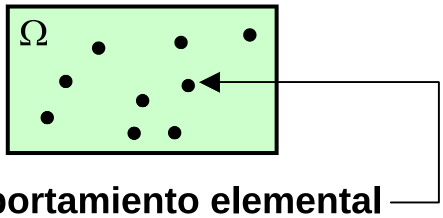
Por ejemplo, a priori se sabe lo que sucederá al realizar el experimento consistente en verter un litro de agua destilada a 30 grados sobre dos litros de ácido sulfúrico a 60 grados .... y siempre sucede lo mismo, por más veces que se repita este experimento.

Aleatorios: realizados en condiciones análogas **no puede predecirse el resultado, pero se conoce el conjunto de los resultados posibles.**

Por ejemplo, a priori no se sabe qué resultado se obtendrá al lanzar un dado, pero se conoce el conjunto de los posibles resultados.

1.4 ESPACIO MUESTRAL. COMPORTAMIENTO ELEMENTAL

- **Llamamos espacio muestral de un experimento aleatorio "E" al conjunto Ω que forman los posibles resultados individuales del experimento; de cada uno esos posibles resultados diremos que es un comportamiento elemental o un punto muestral.**



Comportamiento elemental

- **Se dice que el espacio muestral Ω es discreto si el número de comportamientos elementales es infinito numerable** (o sea, puede establecerse una biyección entre Ω y el conjunto de los números naturales; dicho de otro modo: los comportamientos elementales pueden contarse) **o finito.**

  Por ejemplo, siendo "E" el experimento aleatorio consistente en observar el resultado obtenido al lanzar un dado al aire, su espacio muestral Ω es discreto, y lo forman los seis posibles resultados (comportamientos elementales) del experimento:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Por ejemplo, siendo "E" el experimento aleatorio consistente en observar el resultado que se obtiene al lanzar dos dados al aire, su espacio muestral Ω es discreto, y lo forman los 36 posibles resultados (comportamientos elementales) del experimento:

$$\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), \ldots ,(1;6), (2,1), (2;2), \ldots , (6;5), (6;6)\}$$

  Por ejemplo, es discreto el espacio muestral Ω del experimento consistente en observar el número de veces que debe lanzarse una moneda hasta obtener cara, pues Ω está formando por los números naturales.

- **Se dice que el espacio muestral es continuo si el número de comportamientos elementales es infinito no numerable** (o sea, no es posible contar el número de comportamientos elementales).

  Por ejemplo, en el experimento consistente en elegir al azar un punto de un círculo de 2 metros de radio y observar su distancia al centro del círculo, el espacio muestral Ω es continuo, y lo forman los números comprendidos entre 0 y 2, que son tantos que ni los japoneses pueden contarlos:

$$\Omega = \{x \in \Re / 0 \le x \le 2\}.$$

1.5 SUCESO

Siendo "E" un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, **llamaremos suceso a todo subconjunto del espacio muestral,** incluyendo al vacío $\varnothing$ y al propio Ω. Del conjunto vacío $\varnothing$ se dice **suceso imposible;** y de Ω se dice **suceso seguro.**

Si el espacio muestral Ω lo forman "k" comportamientos elementales o puntos muestrales, el número de sucesos es 2^k; si el número de comportamientos elementales es infinito (numerable o no), el número de sucesos es infinito.

Llamaremos **suceso elemental** a todo suceso formado por un único comportamiento elemental; en otros casos diremos que el suceso es **compuesto.**

Diremos que ocurre el suceso "S" si el resultado del experimento es alguno de los comportamientos elementales que forman "S".

Por ejemplo, sea el experimento de lanzar dos dados al aire, cuyo espacio muestral Ω está formado por 36 comportamientos elementales:

$$\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), \ldots ,(1;6), (2,1), (2;2), \ldots , (6;5), (6;6)\}$$

- Siendo S_1 el suceso de que la suma de los resultados obtenidos sea 7, ocurre S_1 si como resultado del experimento ocurre cualquiera de los siguientes comportamientos elementales: $(1;6), (2;5), (3;4),(4;3), (5,2), (6;1)$. Por eso escribimos $S_1 = \{(1;6), (2;5), (3;4),(4;3), (5,2), (6;1)\}$.
- Siendo S_2 el suceso de que la suma de los resultados obtenidos sea 11, es claro que $S_2 = \{(5;6), (6;5)\}$.
- Siendo S_3 el suceso de que la suma de los resultados obtenidos sea 12, es claro que $S_3 = \{(6;6)\}$.
- Siendo S_4 el suceso de que el producto de los resultados obtenidos sea 12, es claro que $S_4 = \{(2;6), (3;4), (4;3),(6;2)\}$.
- Los sucesos S_1, S_2 y S_4 son compuestos, pues están formados por más de un comportamiento elemental; el suceso S_3 es elemental, pues está formado por un único comportamiento elemental.

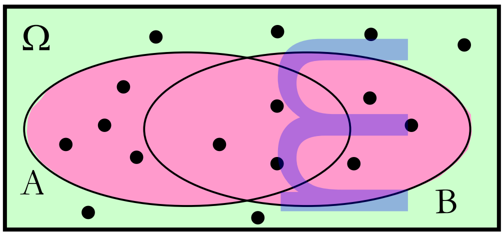
1.6 OPERACIONES CON SUCESOS

Sean "A" y "B" sucesos de un experimento aleatorio "E" con espacio muestral Ω.

Unión de sucesos

La **unión** de los sucesos "A" y "B" se denota $A \cup B$, y es el suceso de que ocurra "A" u ocurra "B"; es decir, $A \cup B$ es el suceso formado por los comportamientos elementales que pertenecen a "A" o a "B":

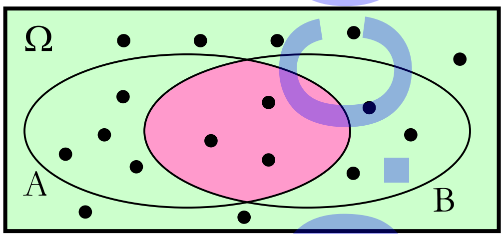
$$A \cup B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ ó } c \in B\}$$



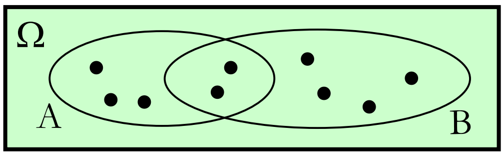
Intersección de sucesos

La **intersección** de "A" y "B" se denota $A \cap B$, y es el suceso de que ocurran a la vez "A" y "B"; es decir, $A \cap B$ es el suceso formado por los comportamientos elementales que a la vez pertenecen a "A" y a "B":

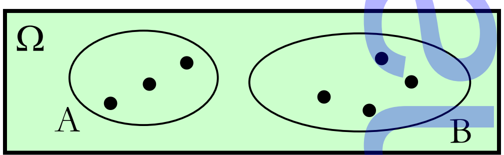
$$A \cap B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ y } c \in B\}$$



Si $A \cap B = \varnothing$ se dice que "A" y "B" son **sucesos incompatibles o disjuntos o mutuamente excluyentes:** no pueden ocurrir los dos a la vez, si ocurre uno no ocurre el otro. Si $A \cap B \neq \varnothing$ se dice que "A" y "B" son **sucesos compatibles:** pueden ocurrir ambos a la vez.



A y B son compatibles: pueden ocurrir ambos a la vez



A y B son incompatibles: no pueden ocurrir ambos a la vez

Por ejemplo, al lanzar un dado, siendo $A = \{2, 4, 6\}$ el suceso de obtener un número par y $B = \{4, 5, 6\}$ el de obtener un número mayor que 3, entonces $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ es el suceso de obtener un número par o un número mayor que 3, y $A \cap B = \{4, 6\}$ es el suceso de obtener un número par y mayor que 3.

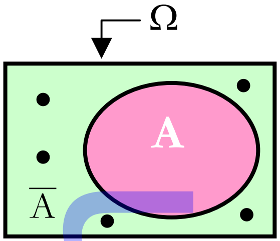
Propiedades

La unión y la intersección sucesos tienen las mismas propiedades que la unión y la intersección de conjuntos; para cualesquiera sucesos A, B y C se verifica que:

* Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
* Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
* Idempotencia:	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
* Absorción:	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
* Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
*	$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$	$A \cap \Omega = \Omega \cap A = A$

Complementario de un suceso

El **complementario** del suceso "A" se denota $\overline{A}$, y es el suceso de que no ocurra "A", es decir, $\overline{A} = \{c \in \Omega \,/\, c \notin A\}$ es el suceso formado por los comportamientos elementales que no son de "A". **Obvio:** $A \cup \overline{A} = \Omega$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$; también es evidente que si $A \subset B$ entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$.



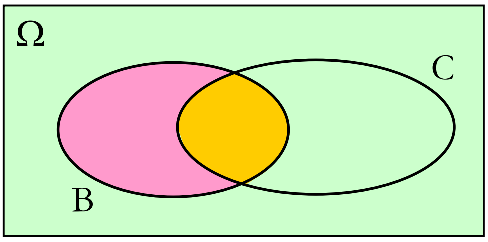
Las leyes de Morgan tienen vigencia plena:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \;;\; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Todo suceso puede expresarse como unión de dos sucesos incompatibles:

$$B \underset{\boxed{\text{de perogrullo}}}{=} B \cap \Omega \overset{\boxed{\forall\, C \subseteq \Omega \text{ es } \Omega = C \cup \overline{C}}}{=} B \cap (C \cup \overline{C}) \underset{\boxed{\text{propiedad distributiva}}}{=} (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C})$$

siendo incompatibles los sucesos $B \cap C$ y $B \cap \overline{C}$.



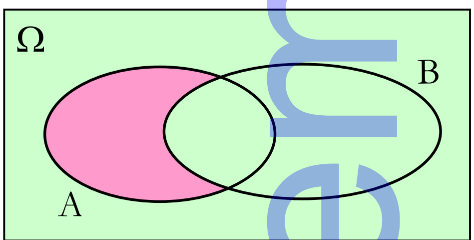
$B \cap C$ es

$B \cap \overline{C}$ es

$$B = (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C})$$

Diferencia de sucesos

La **diferencia** de los sucesos "A" y "B" se denota $A - B$, y es el suceso de que ocurra "A" y no ocurra "B"; es decir, $A - B$ es el suceso formado por los comportamientos elementales que son de "A" pero no de "B":

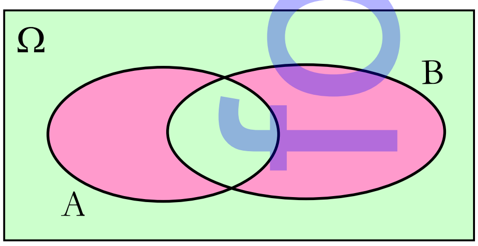


$$A - B = \{c \in \Omega \,/\, c \in A \text{ y } c \notin B\}$$

Obvio: $A - B = A \cap \overline{B}$.

Diferencia simétrica de sucesos

La **diferencia simétrica** de los sucesos "A" y "B" se denota $A \Delta B$, y es el suceso de que ocurra "A" u ocurra "B" pero no ocurra $A \cap B$; o sea, el suceso $A \Delta B$ lo forman los comportamientos elementales que son de "A" o de "B", pero no son de $A \cap B$.



Obvio: $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

FONEMATO 1.6.1

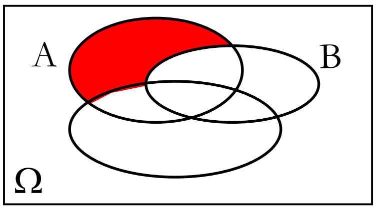
Si A, B y C son sucesos correspondientes a un cierto experimento, determínense las expresiones de los siguientes sucesos:

1) Ocurre sólo A.
2) Ocurren A y B pero no C.
3) Ocurren los tres.
4) Ocurre al menos uno.
5) Ocurren al menos dos.
6) Ocurre uno y sólo uno.
7) Ocurren dos y sólo dos.
8) No ocurre ninguno.
9) No ocurren más de dos.

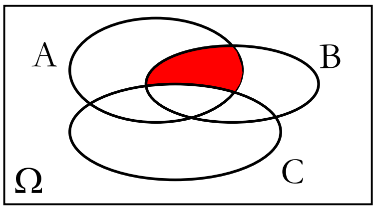
SOLUCIÓN

1) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2) $A \cap B \cap \overline{C}$
3) $A \cap B \cap C$
4) $A \cup B \cup C$
5) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
7) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$
8) Es el complementario de "ocurre alguno", o sea: $\overline{A \cup B \cup C}$
9) Es el complementario de "ocurren los tres", o sea: $\overline{A \cap B \cap C}$

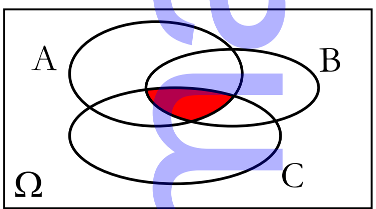
La regiones rojas corresponden a los **sucesos** por los que nos preguntan.



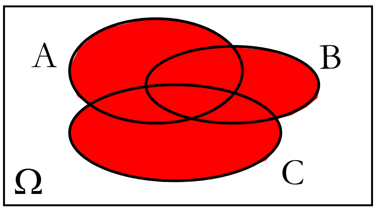
1) Solo A



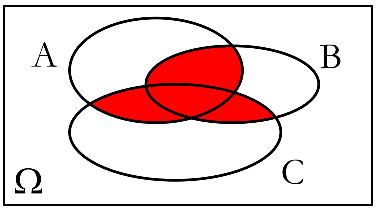
2) A y B pero no C



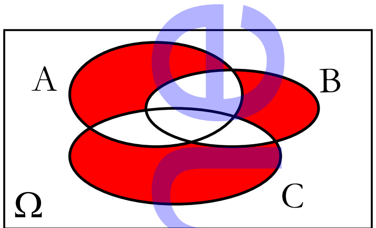
3) Los tres



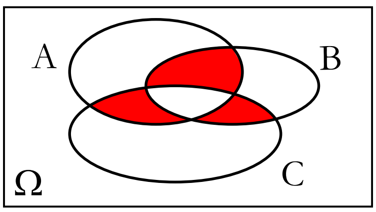
4) Al menos uno



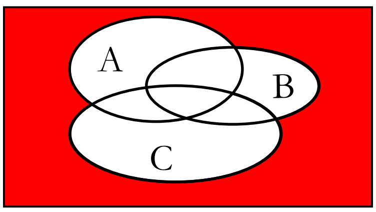
5) Al menos dos



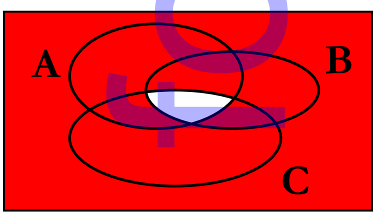
6) Uno y sólo uno



7) Dos y sólo dos



8) Ninguno



9) No más de dos

FONEMATO 1.6.2

De una baraja de 52 cartas se extrae una carta, siendo A el suceso de extraer un rey y B el suceso de extraer una copa. Descríbanse los siguientes sucesos:

$$1)\ A\cup B\ ;\ 2)\ A\cap B\ ;\ 3)\ A\cup\overline{B}\ ;\ 4)\ \overline{A}\cup\overline{B}$$
$$5)\ A-B\ ;\ 6)\ \overline{A}-\overline{B}\ ;\ 7)\ \overline{B}-\overline{A}\ ;\ 8)\ (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

SOLUCIÓN

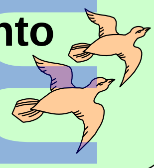
1) $A\cup B\Rightarrow$ la carta es rey o es copa.
2) $A\cap B\Rightarrow$ la carta es rey y es copa $\equiv$ la carta es el rey de copas.
3) $A\cup\overline{B}\Rightarrow$ la carta es rey o no es copa.
4) Según Morgan: $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}\Rightarrow$ la carta no es el rey de copas.
5) $A-B=A\cap\overline{B}\Rightarrow$ la carta es rey y no es copa.
6) $\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cap B\Rightarrow$ la carta no es rey y es copa.
7) $\overline{B}-\overline{A}=\overline{B}\cap\overline{\overline{A}}=\overline{B}\cap A\Rightarrow$ la carta no es copa y es rey.
8) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\Rightarrow$ la carta es rey.

FONEMATO 1.6.3

Demuéstrense las leyes de Morgan.

SOLUCIÓN

Para demostrar que los conjuntos "Pepe" y "Juan" son el mismo, debes demostrar que todo elemento de "Pepe" es elemento de "Juan", y que todo elemento de "Juan" es elemento de "Pepe".



- Demostremos que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$* \text{ si } x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \notin A \\ \text{y} \\ x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{y} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$* \text{ si } x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{y} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \notin A \\ \text{y} \\ x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

- Demostremos que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$* \text{ si } x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \notin A \\ \text{ó} \\ x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{ó} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$* \text{ si } x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ \text{ó} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \notin A \\ \text{ó} \\ x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$$

1.7 ÁLGEBRA DE SUCESOS

- Siendo "E" un experimento aleatorio cuyo espacio muestral Ω lo forman un número finito de puntos muestrales, sea $\wp(\Omega)$ el conjunto de las partes Ω; es decir, $\wp(\Omega)$ es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de Ω.

Como todo subconjunto de Ω es un suceso, el conjunto $\wp(\Omega)$ viene a ser el **saco** donde metemos todos los sucesos correspondientes al experimento "E"... en $\wp(\Omega)$ está **individualizado** cada uno de los sucesos correspondientes al experimento aleatorio "E"

Si en el conjunto $\wp(\Omega)$, que es una colección de conjuntos llamados "sucesos", definimos el complementario de un suceso respecto de Ω y la unión y la intersección de sucesos, resulta que $\wp(\Omega)$ es un **álgebra de Boole** (llamado álgebra de Boole de los sucesos del experimento "E"), pues satisface las exigencias que ha de cumplir toda colección finita de conjuntos para poder apellidarse "álgebra de Boole", a saber:

1) Si $A, B \in \wp(\Omega)$ sucede que $A \cup B \in \wp(\Omega)$
2) Si $A \in \wp(\Omega)$ sucede que $\overline{A} \in \wp(\Omega)$

Por ejemplo, en el experimento "E" de elegir al azar un número natural no superior a 3, es claro que $\Omega = \{1, 2, 3\}$, siendo

$$\wp(\Omega) = \{A \,/\, A \subset \Omega\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega, \varnothing\}$$

En tal caso, el álgebra de Boole de los sucesos del experimento "E" es el ente que forman $\wp(\Omega)$ y las operaciones unión de sucesos, intersección de sucesos y complementario de un suceso respecto de Ω.

- Si el espacio muestral Ω del experimento "E" tiene infinitos elementos, el conjunto $\wp(\Omega)$ también tiene infinitos elementos. En tal caso, una vez definidas la unión, la intersección y el complementario, resulta que $\wp(\Omega)$ es un **σ–álgebra de Boole** (llamado σ –álgebra de Boole de los sucesos de "E"), pues satisface las exigencias que debe cumplir toda colección infinita de conjuntos para poder apellidarse σ –álgebra de Boole, a saber:

1) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \wp(\Omega)$, sucede que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \wp(\Omega)$
2) Si $A \in \wp(\Omega)$, sucede que $\overline{A} \in \wp(\Omega)$

En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes.

1.8 LA "PROBABILIDAD" EN EL DICCIONARIO

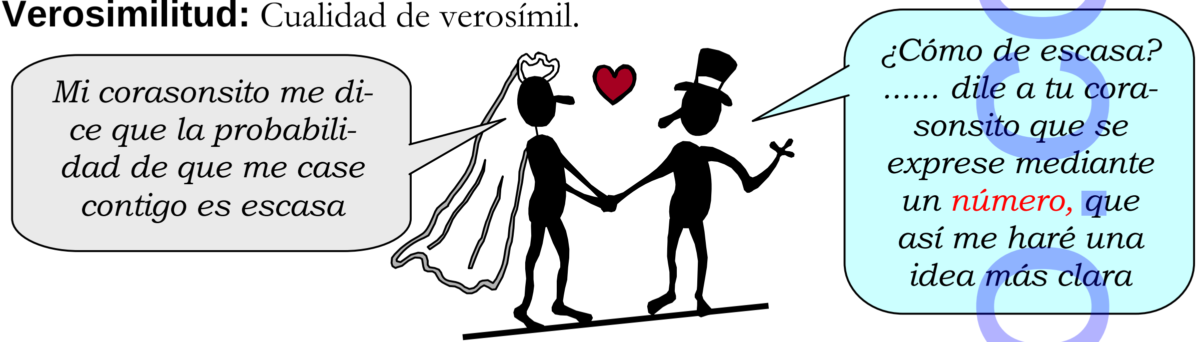
Como la palabra **probabilidad** será la estrella de todo lo que sigue, conviene empezar leyendo en el diccionario de la Real Academia:

Probabilidad: (del lat. *Probabilitas, -ātis*) Verosimilitud o fundada apariencia de verdad ‖ Calidad de probable, que puede suceder.

Probable: (del lat. *Probabilis*) Verosímil o que se funda en razón prudente ‖ Que se puede probar ‖ Dícese de aquello que hay buenas razones para creer que se verificará o sucederá.

Verosímil: Que tiene apariencia de verdadero ‖ Creíble por no ofrecer carácter alguno de falsedad.

Verosimilitud: Cualidad de verosímil.

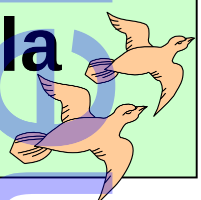


Las proporciones en el reparto de una tarta

Si de una tarta de 800 unidades de masa te comes 160 unidades de masa, lo único que a la Estadística le interesa es la **proporción** **de tarta que ingieres, que se obtiene dividiendo el número que expresa la masa ingerida entre el número que expresa la masa total:**

$$\text{Proporción ingerida} = \frac{\text{masa ingerida}}{\text{masa total de la tarta}} = \frac{160}{800} = 0'2$$

¡Todo es menos petardo si la tarta tiene masa unidad!



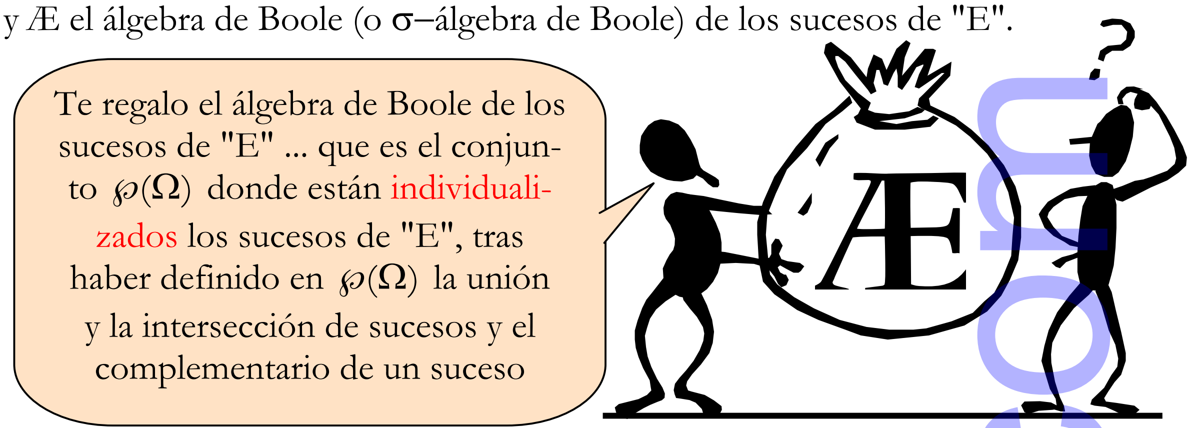
Si en las fiestas de cumpleaños fueras el encargado de calcular la **proporción** de tarta que ingiere cada invitado, estarías encantado de que la masa de TODAS las tartas de cumpleaños fuese la unidad, pues así, por ejemplo, para una persona que ingiere 0'13 unidades de masa, resulta ser:

$$\text{Proporción ingerida} = \frac{\text{masa ingerida}}{\text{masa total de la tarta}} = \frac{0'13}{1} = 0'13$$

lo que es estupendo, pues **el número que expresa la masa ingerida también expresa la proporción de masa ingerida**... y tú no tienes que pasarte toda la fiesta haciendo divisiones como un gilipollas para saber la proporción de tarta que ingiere cada uno, como sucede si la masa total de la tarta no es la unidad.

1.9 LA PROBABILIDAD PARA KOLMOGOROV

Siendo "E" es un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral (recuerda que todo subconjunto de Ω es un suceso), sea $\wp(\Omega)$ el conjunto de las partes de Ω y Æ el álgebra de Boole (o σ–álgebra de Boole) de los sucesos de "E".



Si "P" es una ley que a cada suceso $S \in$Æ le asocia un número real que denotamos P(S), se dice que "P" es una **medida de probabilidad** si:

a) $\forall S \in$Æ es $P(S) \geq 0$.

b) $P(\Omega) = 1$ (recuerda que Ω es el "suceso seguro")

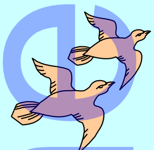
c) Si $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ son sucesos incompatibles dos a dos ($S_i \cap S_j = \varnothing$ si $i \neq j$),

sucede que $P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots\ldots) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_n) + \ldots..$

Si "P" es una medida de probabilidad, de la terna (Ω, Æ, P) se dice **espacio probabilístico**... y siendo "S" un suceso, del número real P(S) que "P" asocia a "S" se dice que es la **probabilidad del suceso "S".**

Una vez definida la medida de probabilidad "P", cabe imaginar que el espacio muestral Ω se transforma en una **tarta de masa unidad** y que cada **trozo** "S" de la tarta es un suceso. Así, la razón entre la masa de "S" y la masa de Ω expresa la **proporción** de masa que hay en "S" si se toma la masa de Ω como universo referencia; de dicha proporción se dice **probabilidad** del suceso "S"... y como la masa de Ω es la unidad, resulta ser:

$$P(S) = \frac{\text{masa de } S}{\text{masa de } \Omega} = \frac{\text{masa de } S}{1} = \text{masa de } S$$



O sea, una maravilla: **el número que expresa la masa de "S" también expresa la proporción entre la masa de "S" y la de Ω.**

Propiedades:

1) $P(\bar{S}) = 1 - P(S)$. En efecto, si $S \cup \bar{S} = \Omega$, es:

$$P(S \cup \bar{S}) = P(\Omega) \Rightarrow P(S) + P(\bar{S}) = 1 \Rightarrow P(\bar{S}) = 1 - P(S)$$

$\boxed{P(\Omega) = 1, \text{ y como } S \text{ y } \bar{S} \text{ son disjuntos es } P(S \cup \bar{S}) = P(S) + P(\bar{S})}$

2) La probabilidad del suceso imposible $\varnothing$ es 0, pues como $\varnothing = \bar{\Omega}$, según la propiedad anterior, es $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

3) Si $A \subset B$, es $P(A) \le P(B)$. En efecto:

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

$$\boxed{A \subset B \Rightarrow B \cap A = A}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup (B \cap \overline{A})) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{pues los sucesos } A \text{ y } B \cap \overline{A} \text{ son incompatibles}}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B) - P(B \cap \overline{A}) \le P(B)$$

$$\boxed{\text{pues } P(B \cap \overline{A}) \ge 0}$$

Obvio: para todo suceso "A" es $P(A) \le 1$, pues $A \subset \Omega$ y $P(\Omega) = 1$.

4) Si $A \subset B$ es $P(B - A) = P(B) - P(A)$. En efecto:

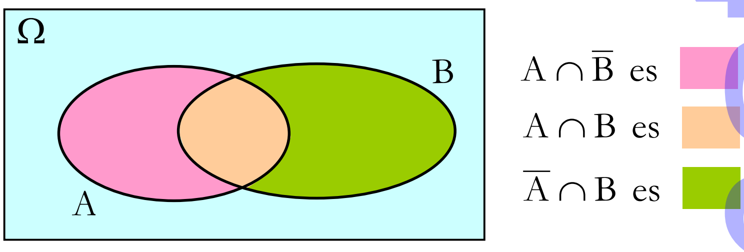
$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{para cualquier par de sucesos } A \text{ y } B \text{ es } B - A = B \cap \overline{A}}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5) **Probabilidad de la unión de dos sucesos**

Para calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$ expresamos $A \cup B$ como unión de tres sucesos incompatibles: $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$



Por tanto:

$$P(A \cup B) = P\big((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big) =$$

$$= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$$

$$\boxed{\text{pues los sucesos } (A \cap \overline{B}),\ (A \cap B) \text{ y } (\overline{A} \cap B) \text{ son incompatibles}}$$

$$= \big(P(A) - P(A \cap B)\big) + P(A \cap B) + \big(P(B) - P(A \cap B)\big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)\ ;\ P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)}$$

- **Probabilidad de la unión de tres sucesos**

$$P(A \cup B \cup C) = P\big((A \cup B) \cup C\big) = P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

pues $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, y así:

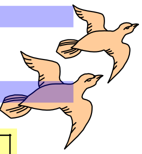
$$P\big((A \cup B) \cap C\big) = P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) =$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

6) Es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

pues sucede que $P(A \cap B) \geq 0$

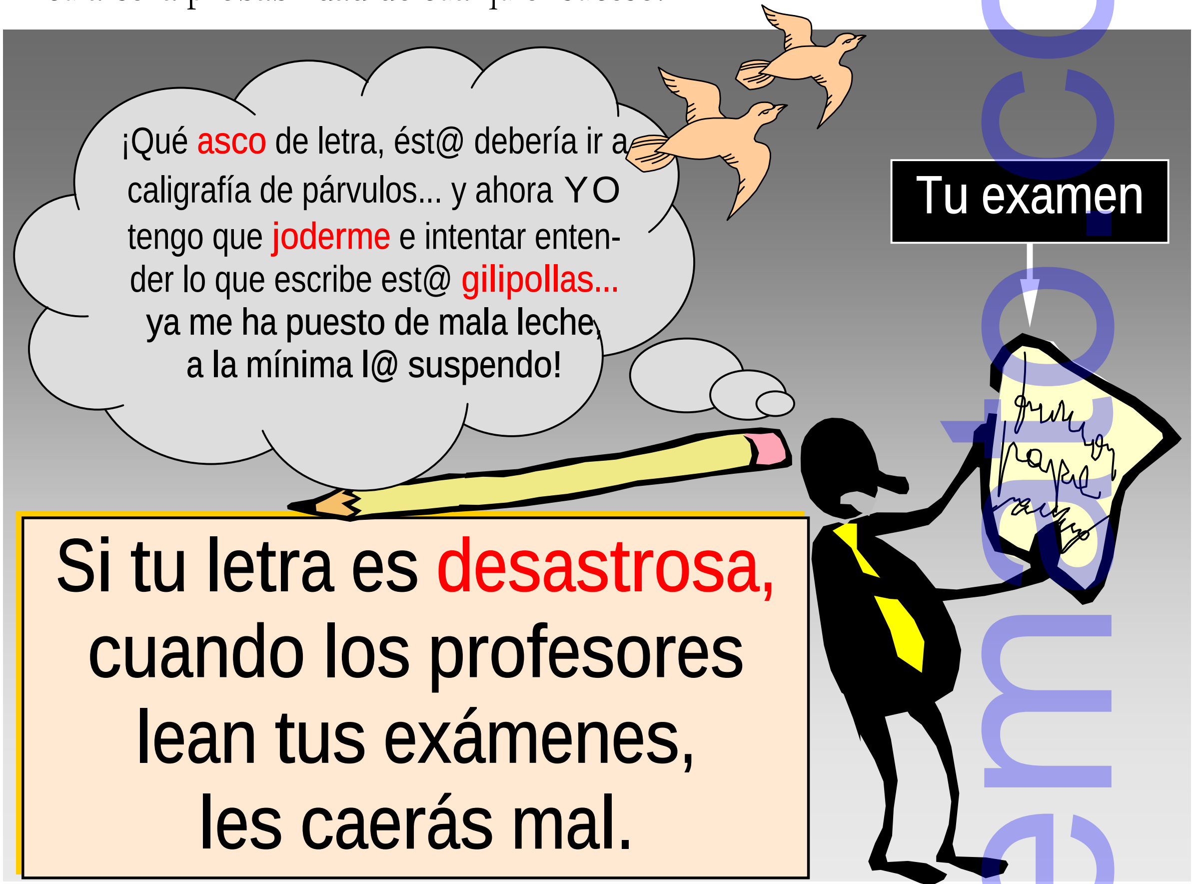
7) **La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman,** pues si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son sucesos elementales y $A = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$, entonces:



$$P(A) = P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_n)$$

pues los sucesos elementales son incompatibles dos a dos

Por tanto, conociendo las probabilidades de los sucesos elementales puede calcularse la probabilidad de cualquier suceso.



FONEMATO 1.9.1

Sean A y B sucesos tales que $P(A)=1/2$, $P(\overline{B})=5/8$ y $P(A\cup B)=3/4$. Calcúlense $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cap B)$.

SOLUCIÓN

VENTANA

- Siendo $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, es:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\boxed{P(A)=1/2\ ;\ P(A\cup B)=3/4\ ;\ P(B)=1-P(\overline{B})=1-(5/8)=3/8}$$

- $$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{según Morgan, es } \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}}$$

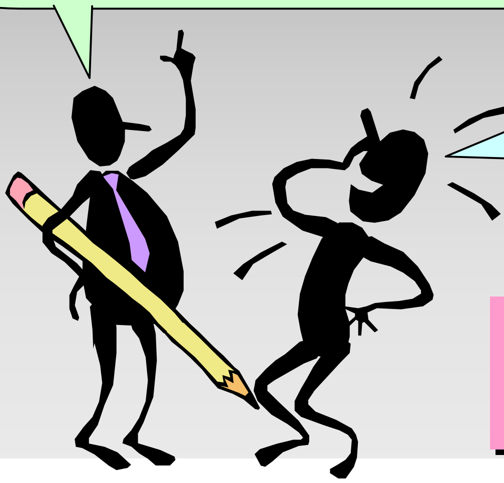
- $$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\boxed{\text{según Morgan, es } \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}}$$

- $$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\overline{A}\cap B\equiv \text{parte de B que no es de A}\Rightarrow P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)}$$

Es seguro que en tu examen de Estadística deberás calcular la probabilidad de algún suceso relacionado con un experimento aleatorio "E". Si "A" es el primer suceso cuya probabilidad calculas y obtienes que $P(A)=p$, quedarás como **torero de tronío** si rematas diciendo que eso significa que **la frecuencia relativa del suceso "A" converge en probabilidad a "p"; es decir, sin más que repetir el experimento "E" un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa del suceso "A" se aproxima a "p" tanto como se quiera**... y no seas pesadito y aburras a tu profe: si en examen te pide la probabilidad de 15 sucesos, no debes escribir 15 veces el mismo coñazo de la "convergencia en probabilidad", basta con una vez.



Menos mal que el examen es escrito... si fuese oral me mearía de risa al soltar lo de la convergencia en probabilidad

En examen no importa lo que sabes... importa lo que parece que sabes.

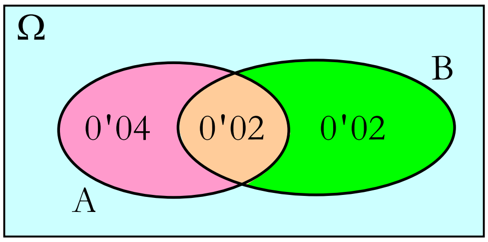
FONEMATO 1.9.2

El 6 % de las piezas fabricadas por una máquina tiene el defecto A, el 4 % tiene el defecto B y el 2 % tiene ambos defectos. Calcúlese:

1) El porcentaje de piezas sin defecto.
2) El porcentaje de piezas con un defecto al menos.
3) El porcentaje de piezas con un único defecto.
4) El porcentaje de piezas que únicamente tienen el defecto B.

SOLUCIÓN

Siendo "A" el suceso de que una pieza tenga el defecto "A", es $P(A) = 0'06$.
Siendo "B" el suceso de que una pieza tenga el defecto "B", es $P(B) = 0'04$.
Nos dicen que $P(A \cap B) = 0'02$.
Así las cosas no hay que ser un lince para en un periquete hacer el siguiente esquema.



$A \cap \overline{B}$ es

$A \cap B$ es

$\overline{A} \cap B$ es

1) Una pieza carece de defectos sólo si ocurre el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, siendo:

$$\boxed{\text{según Morgan, es } \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}}$$ **VENTANA**

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'08 = 0'92$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'06 + 0'04 - 0'02 = 0'08}$$

2) Una pieza tiene al menos un defecto sólo si ocurre el suceso $A \cup B$, y ya sabemos que $P(A \cup B) = 0'08$.

3) Una pieza tiene un único defecto sólo si ocurre el suceso $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$:

VENTANA

$$\boxed{\text{pues los sucesos } A \cup \overline{B} \text{ y } \overline{A} \cap B \text{ son incompatibles}}$$

$$P\big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0'04 + 0'02 = \boxed{0'06}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0'06 - 0'02 = 0'04 \\ P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0'04 - 0'02 = 0'02 \end{array}}$$

> **Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ **converge en probabilidad** a $0'06$; es decir, sin más que repetir el experimento un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $0'06$ tanto como queramos.

4) Una pieza tiene únicamente el defecto B sólo si ocurre el suceso $\overline{A} \cap B$, y ya sabemos que $P(\overline{A} \cap B) = 0'02$.

FONEMATO 1.9.3

Considera un dado de seis caras trucado de modo que la probabilidad de obtener un número par es "a" y la de obtener un número impar es "b".

1) Calcúlense "a" y "b" sabiendo que la probabilidad del suceso A de obtener un número mayor o igual que 4 al lanzar el dado es $5/12$.
2) Calcúlese la probabilidad de que al lanzar el dado sea no inferior a 13 el número obtenido al sumar 3 al doble del resultado del lanzamiento.
3) Calcúlese la probabilidad de que al lanzar el dado sea no superior a 5 el número obtenido al restar 4 al triple del resultado del lanzamiento.

SOLUCIÓN

El espacio muestral Ω del experimento lo forman los seis posibles resultados (sucesos elementales) que se pueden obtener: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Para hallar las dos incógnitas "a" y "b" debemos imponer dos condiciones:

a) Exigimos que la probabilidad del suceso seguro Ω sea la unidad:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b + a + b + a + b = 1 \Rightarrow 3.a + 3.b = 1 \quad (I)$$

b) Exigimos que la probabilidad del suceso A sea $5/12$: ocurre A sólo si al lanzar el dado se obtiene un 4 un 5 o un 6, y siendo incompatibles estos sucesos elementales, es:

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) \Rightarrow 5/12 = b + a + b \quad (II)$$

- La solución del sistema que forman (I) y (II) es $a = 1/4$, $b = 1/12$.

2) Si B es el suceso de que al lanzar el dado sea no inferior a 13 el número obtenido al sumar 3 al doble del resultado del lanzamiento, entonces:

$$B = \{5,6\}$$

VENTANA

Denotando "x" al resultado que se obtiene tras el lanzamiento del dado, sucede B sólo si $3 + 2.x \geq 13 \Rightarrow x \geq 5$; o sea, sucede B si al lanzar el dado se obtiene un 5 o un 6.

Como la probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman, resulta ser:

$$P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

3) Siendo C el suceso de que al lanzar el dado sea no superior a 5 el número obtenido al restar 4 al triple del resultado del lanzamiento, es:

$$C = \{1,2,3\}$$

VENTANA

Denotando "x" al resultado que se obtiene tras el lanzamiento del dado, sucede C sólo si $3.x - 4 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3$; o sea, sucede C si al lanzar el dado se obtiene un 1, un 2 o un 3.

Como la probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman, resulta ser:

$$P(C) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$

FONEMATO 1.9.4

Pruébese que $P(A\cup B)\geq 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$.

SOLUCIÓN

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

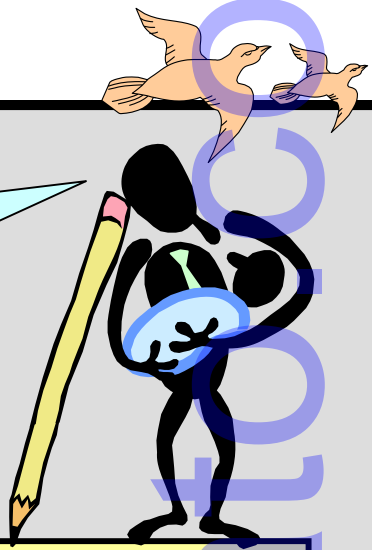
$$\boxed{\text{es } P(A)=1-P(\overline{A}) \text{ y } P(B)=1-P(\overline{B})}$$

$$=1-P(\overline{A})+1-P(\overline{B})-P(A\cap B)=$$

$$=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+(1-P(A\cap B))\geq 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$$

$$\boxed{\text{pues } 1-P(A\cap B)\geq 0}$$

Acostúmbrate a usar ventanas, pues facilitan mucho la lectura de lo escrito, por lo que el profesor que corrija tu examen te lo agradecerá con su cariño y simpatía



Pedrusco "K" = Pedrusco "T"

VENTANA

Razonamientos o cálculos que permiten pasar de un lado a otro del "=" o de "⇒"

Pedrusco "K" ⇒ Pedrusco "T"

1.10 DEFINICIÓN FRECUENTISTA DE "PROBABILIDAD"

Si "S" es un suceso de un experimento aleatorio "E" y el experimento se repite "N" veces, entonces, si el suceso "S" ocurre "n" veces, del número natural "n" se dice **frecuencia absoluta** del suceso "S".

Del número no negativo n/N se dice **frecuencia relativa** del suceso "S", y se denota $f(S)$.

La probabilidad del suceso "S" es el número al que **tiende** la frecuencia relativa de "S" cuando el número "N" de veces que se realiza el experimento "E" tiende a infinito:

$$P(S) = \lim_{N\to\infty} f(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N}$$

Por ejemplo: si en la rifa de un jamón tienes 30 de las 100 papeletas del sorteo, siendo "S" el suceso de que te toque el jamón, al decir que $P(S) = 0'3$ se quiere decir que, sin más que repetir el sorteo un número suficientemente grande de veces, el número $\left|f(S) - 0'3\right|$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera.

1.11 LA "PROBABILIDAD" PARA LAPLACE

La de Laplace es la más popular de las definiciones de probabilidad, pero **sólo tiene validez si el espacio muestral está formado por un número finito de sucesos elementales equiprobables.**

- Si $\Omega = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ y $P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_k) = a$, entonces:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_n) = 1 \Rightarrow k.a = 1 \Rightarrow a = 1/k$$

Si el suceso "S" lo forman los "m" sucesos elementales $S_1, S_2, \ldots, S_m$, es:

$$P(S) = P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m) \underset{\uparrow}{=} P(S_1) + P(S_2) + \ldots + P(S_m) = m.(1/k)$$

pues los sucesos elementales $S_1, S_2, \ldots, S_m$ son incompatibles

o sea:

$$P(S) = \frac{m}{k} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles en } \Omega}$$

FONEMATO 1.11.1

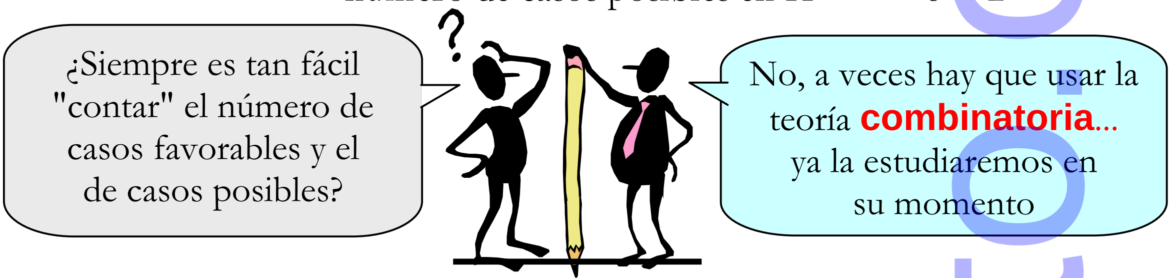
Calcúlese la probabilidad de que al lanzar un dado de seis caras se obtenga un número par si el dado está equilibrado, si el dado está trucado de modo que los números pares se obtienen el doble de veces que los impares, y si el dado está trucado de modo que los números pares se obtienen el triple de veces que los impares.

SOLUCIÓN

El espacio muestral Ω del experimento está formado por los seis posibles resultados (sucesos elementales) que pueden obtenerse: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

1) Si el dado está equilibrado los seis sucesos elementales son equiprobables; así, siendo $A = \{2,4,6\}$ el suceso de obtener un número par, según Laplace, es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles en } \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



2) Como **los sucesos elementales no son equiprobables** si el dado está trucado, **no es lícito recurrir a Laplace.**

Si los números pares se obtienen el doble de veces que los impares, es:

$$P(1) = P(3) = P(5) = a \ ; \ P(2) = P(4) = P(6) = 2.a$$

Al exigir que la probabilidad del suceso seguro Ω sea 1 resulta $a = 1/9$:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a + 2.a + a + 2.a + a + 2.a = 1 \Rightarrow 9.a = 1 \Rightarrow a = 1/9$$

Así, siendo $A = \{2,4,6\}$ el suceso de obtener un número par, es:

$$P(A) = P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

pues los sucesos elementales 2, 4 y 6 son incompatibles

3) Si los números pares se obtienen el triple de veces que los impares, es:

$$P(1) = P(3) = P(5) = b \ ; \ P(2) = P(4) = P(6) = 3.b$$

Al exigir que la probabilidad del suceso seguro Ω sea 1 resulta $b = 1/12$:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b + 3.b + b + 3.b + b + 3.b = 1 \Rightarrow 12.b = 1 \Rightarrow b = 1/12$$

Así, siendo $A = \{2,4,6\}$ el suceso de obtener un número par, es:

$$P(A) = P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$$

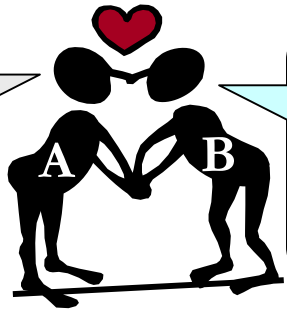
pues los sucesos elementales 2, 4 y 6 son incompatibles

1.12 PROBABILIDAD CONDICIONADA

Recuerda: cabe imaginar que el espacio muestral Ω de un experimento aleatorio es una tarta de masa unidad y que cada trozo "S" de la tarta es un suceso. Así, la razón entre la masa de "S" y la de Ω expresa la proporción de masa que hay en "S" si se toma como universo referencial la masa de Ω; de dicha proporción se dice que es la probabilidad de "S" .... y como la masa de Ω es la unidad, resulta que:

$$P(S) = \frac{\text{masa de S}}{\text{masa de } \Omega} = \frac{\text{masa de S}}{1} = \text{masa de S}$$

A mí me tocan 0'28 unidades de la tarta de masa unidad ... y como te quiero mucho, voy a compartir contigo 0'07 unidades



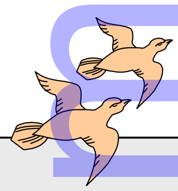
*Eres un miserable y que no me quieres tanto, porque la **proporción** de tu masa que compartes conmigo es* 0'07/0'28 = 0'25

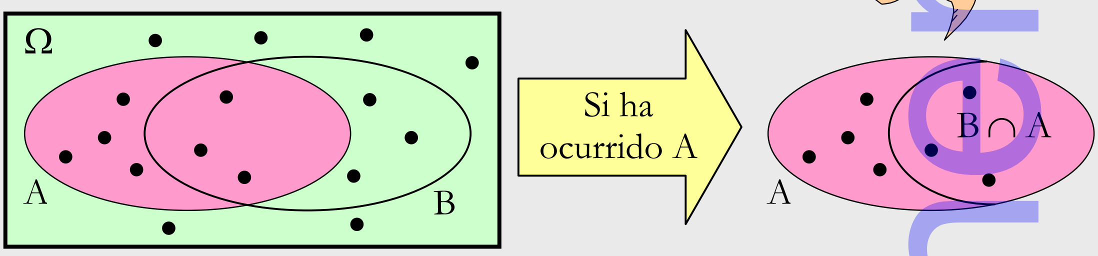
Siendo Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio y "A" y "B" dos sucesos tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, consideremos que como resultado del experimento ha ocurrido el suceso "A"; es decir, se sabe que el resultado del experimento ha sido uno de los sucesos elementales que forman "A".

Cuando habiendo ocurrido el suceso "A" ocurre también el suceso "B" se dice que ha ocurrido el suceso **B condicionado por A**, que se denota B/A.

La **probabilidad** del suceso B/A se define así:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \equiv \frac{\text{masa de } B \cap A}{\text{masa de } A}$$





Si ha ocurrido el suceso "A", el espacio muestral queda reducido a los sucesos elementales que forman "A"; es decir, "A" es el **nuevo universo referencial,** y la masa que hay en él es $P(A)$. Habiendo ocurrido el suceso "A", ocurrirá el suceso B/A si el resultado del experimento es alguno de los sucesos elementales que forman $B \cap A$; así, la probabilidad del suceso B/A es la **proporción** entre la masa del suceso $B \cap A$ y la masa del suceso "A".

Observa: la probabilidad condicionada $P(\bullet / A)$ cumple las exigencias del señor Kolmogorov:

1) $\forall\ S \in \text{Æ}$ es $P(S/A) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(A)} \geq 0$, pues $P(S \cap A) \geq 0$ y $P(A) > 0$

2) $P(\Omega/A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) Si $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\ldots$ son incompatibles dos a dos ($S_i \cap S_j = \varnothing$ si $i \neq j$), es:

$$P\big((S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots)/A\big) = P(S_1/A) + P(S_2/A) + \ldots + P(S_n/A) + \ldots$$

En efecto, según la definición de probabilidad condicionada:

$$P\big((S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots)/A\big) = \frac{P\big((S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots) \cap A\big)}{P(A)} =$$

la intersección es distributiva respecto de la unión

$$= \frac{P\big((S_1 \cap A) \cup (S_2 \cap A) \cup \ldots \cup (S_n \cap A) \cup \ldots\big)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(S_1 \cap A) + P(S_2 \cap A) + \ldots + P(S_n \cap A) + \ldots}{P(A)} =$$

Si $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ son incompatibles dos a dos, también son incompa - tibles dos a dos los sucesos $(S_1 \cap A), (S_2 \cap A), \ldots, (S_n \cap A), \ldots$; así, la probabilidad de su unión es la suma de sus respectivas probabilidades

$$= \frac{P(S_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(S_2 \cap A)}{P(A)} + \ldots + \frac{P(S_n \cap A)}{P(A)} + \ldots =$$

$$= P(S_1/A) + P(S_2/A) + \ldots + P(S_n/A) + \ldots$$

pues $\dfrac{P(S_k \cap A)}{P(A)} = P(S_k/A),\ \forall\ k = 1,2,\ldots$

Propiedades

1) **Regla de la multiplicación:** siendo

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\ ;\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

al tener en cuenta que $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, resulta evidente la que se llama **regla de la multiplicación:**

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A).P(B/A) \\ P(B).P(A/B) \end{cases}$$

que **nos permitirá calcular la probabilidad de un suceso que es una cadena de intersecciones.**

- **Para tres sucesos** A, B y C, es:

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) =$$
$$= P(A \cap B).P(C/A \cap B) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$$

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

- **Para "n" sucesos** $S_1, S_2, \ldots, S_n$, es:

$$P(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n) =$$
$$= P(S_1).P(S_2/S_1).P(S_2/S_1 \cap S_2).....P(S_n/S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1})$$

2) Es $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$. En efecto:

$$1 = P(\Omega/A) = P\big((B \cup \overline{B})/A\big) = P(\overline{B}/A) + P(B/A) \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$$

$\Omega = B \cup \overline{B}$

pues B y $\overline{B}$ son incompatibles

3) Es $P(B/A) = P\big((B \cap C)/A\big) + P\big((B \cap \overline{C})/A\big)$. En efecto:

$$P(B/A) = P\big(((B \cap C) \cup (B \cap \overline{C}))/A\big) = P\big((B \cap C)/A\big) + P\big((B \cap \overline{C})/A\big)$$

$B = (B \cap C) \cup (B \cap \overline{C})$

pues $(B \cap C)$ y $(B \cap \overline{C})$ son incompatibles

4) Es $P\big((B \cup C)/A\big) = P(B/A) + P(C/A) - P\big((B \cap C)/A\big)$.

En efecto:

según la definición de probabilidad condicionada

$$P\big((B \cup C)/A\big) = \frac{P\big((B \cup C) \cap A\big)}{P(A)} = \frac{P\big((B \cap A) \cup (C \cap A)\big)}{P(A)} =$$

"$\cap$" es distributiva respecto de "$\cup$"

sabemos que $P(\text{Pepe} \cup \text{Juan}) = P(\text{Pepe}) + P(\text{Juan}) - P(\text{Pepe} \cap \text{Juan})$

$$= \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A) - P\big((B \cap A) \cap (C \cap A)\big)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A) - P(B \cap C \cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} - \frac{P\big((B \cap C) \cap A\big)}{P(A)} =$$

$$= P(B/A) + P(C/A) - P\big((B \cap C)/A\big)$$

5) Si $B \subset C$ es $P(B/A) \leq P(C/A)$. En efecto:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \leq \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(C/A)$$

si $B \subset C \Rightarrow B \cap A \subset C \cap A \Rightarrow P(B \cap A) \leq P(C \cap A)$

No entiendes realmente algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.

FONEMATO 1.12.1

Sean A y B sucesos de un cierto experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=1/2\ ;\ P(B)=1/3\ ;\ P(A\cap B)=1/4$$

Calcúlense $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}/\overline{B})$ y $P(\overline{B}/\overline{A})$.

SOLUCIÓN

- Es: $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/4}{1/3}=\frac{3}{4}$$
- Es: $$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$
- Es: $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$
- Es: $$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-(7/12)}{1-(1/3)}=\frac{5}{8}$$
- Es: $$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{B\cup A})}{1-P(A)}=\frac{1-P(B\cup A)}{1-P(A)}=\frac{1-(7/12)}{1-(1/2)}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso $\overline{B}/\overline{A}$ converge en probabilidad a $5/6$; es decir, sin más que repetir el experimento un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $5/6$ tanto como queramos.

FONEMATO 1.12.2

Sean A y B sucesos de un cierto experimento aleatorio. Se sabe que:

$$P(A)=1/3\ ;\ P(B)=1/5\ ;\ P(A/B)+P(B/A)=2/3$$

Calcúlense $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

SOLUCIÓN

- Es: $$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{12}$$

VENTANA

$$P(A/B)+P(B/A)=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\boxed{P(A)=1/3\ \text{y}\ P(B)=1/5}$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{1/5}+\frac{P(B\cap A)}{1/3}=\frac{2}{3}\Rightarrow 8.P(A\cap B)=\frac{2}{3}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

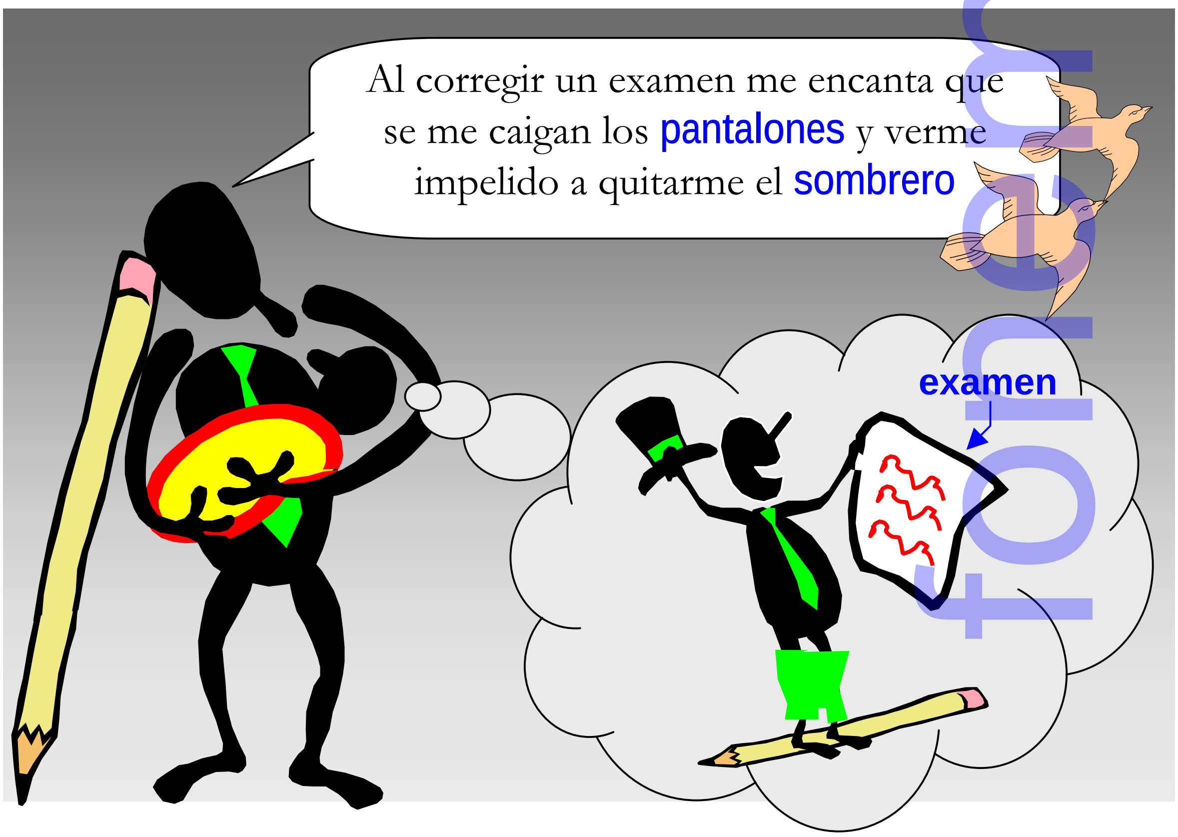
$$\boxed{P(A\cap B)=P(B\cap A)}$$

- Es: $$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{11}{20}}$$

$$\boxed{P(A)=1/3\ ;\ P(B)=1/5\ ;\ P(A\cap B)=1/12}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$ converge en probabilidad a 11/20; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a 11/20 tanto como queramos.



FONEMATO 1.12.3

En un multicine funcionan dos salas A_1 y A_2. Siendo S_i el suceso de que en una sesión determinada la i-ésima sala $(i = 1{,}2)$ se llene antes de empezar la proyección, se sabe que $P(S_1) = 0'7$, $P(S_2) = 0'5$ y $P(S_1 \cap S_2) = 0'45$. Calcúlese la probabilidad de que antes de empezar la proyección:

1) Se llene al menos una sala.
2) Se llene la sala A_1 pero no la A_2.
3) Ninguna de las dos salas se llene.
4) Al menos una de las dos salas no se llene.
5) Se llene A_2 supuesto que se ha llenado ya A_1, ¿coincide con $P(S_2)$?

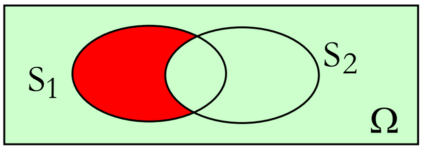
SOLUCIÓN

1) Se llena al menos una sala si ocurre el suceso $S_1 \cup S_2$:

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) = 0'7 + 0'5 - 0'45 = 0'75$$

2) Se llena la sala A_1 pero no la A_2 si ocurre el suceso $S_1 \cap \bar{S}_2$:

$$P(S_1 \cap \bar{S}_2) = P(S_1) - P(S_1 \cap S_2) = 0'7 - 0'45$$



6) Ninguna de las dos salas se llena si ocurre el suceso $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$:

$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) \underset{\uparrow}{=} P(\overline{S_1 \cup S_2}) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - 0'75$$

leyes de Morgan

7) Al menos una de las dos salas no se llena si ocurre el suceso $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$:

$$P(\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2) \underset{\uparrow}{=} P(\overline{S_1 \cap S_2}) = 1 - P(S_1 \cap S_2) = 1 - 0'45$$

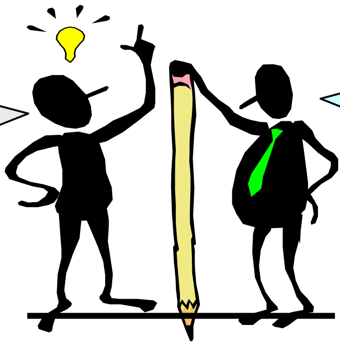
leyes de Morgan

5) Debemos calcular la probabilidad del suceso S_2/S_1:

$$P(S_2/S_1) \underset{\uparrow}{=} \frac{P(S_2 \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{0'45}{0'7} = 0'642 \neq P(S_2)$$

según la definición de probabilidad condicionada

Seguro que hay un nombre especial para el caso en que $P(S_2 \cap S_1) = P(S_2).P(S_1)$



¡Eres un lince!... en tal caso se dice que S_1 y S_2 son **independientes**

FONEMATO 1.12.4

En el experimento de lanzar un dado de seis caras al aire y observar el resultado, sean los sucesos $A = \{3,4,5,6\}$ y $B = \{2,4\}$.

Calcúlese la probabilidad de que ocurra B si se sabe que ha ocurrido A.

SOLUCIÓN

El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Si $A = \{3,4,5,6\}$ y $B = \{2,4\}$, es $A \cap B = B \cap A = \{4\}$.

Los resultados que pueden obtenerse al lanzar el dado son equiprobables; por tanto, según **Laplace,** es:

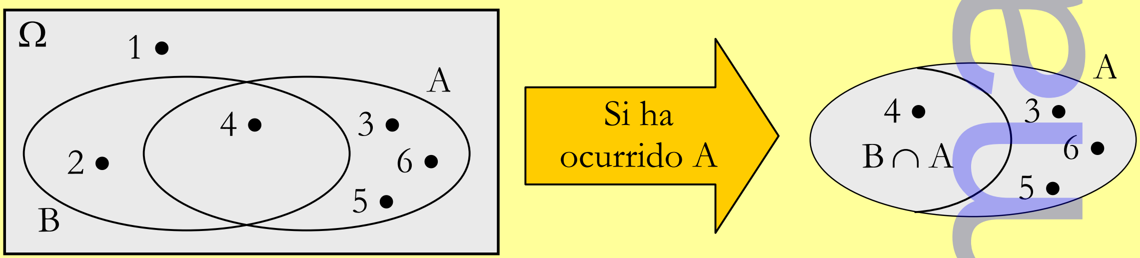
$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles en } \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso B}}{\text{número de casos posibles en } \Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

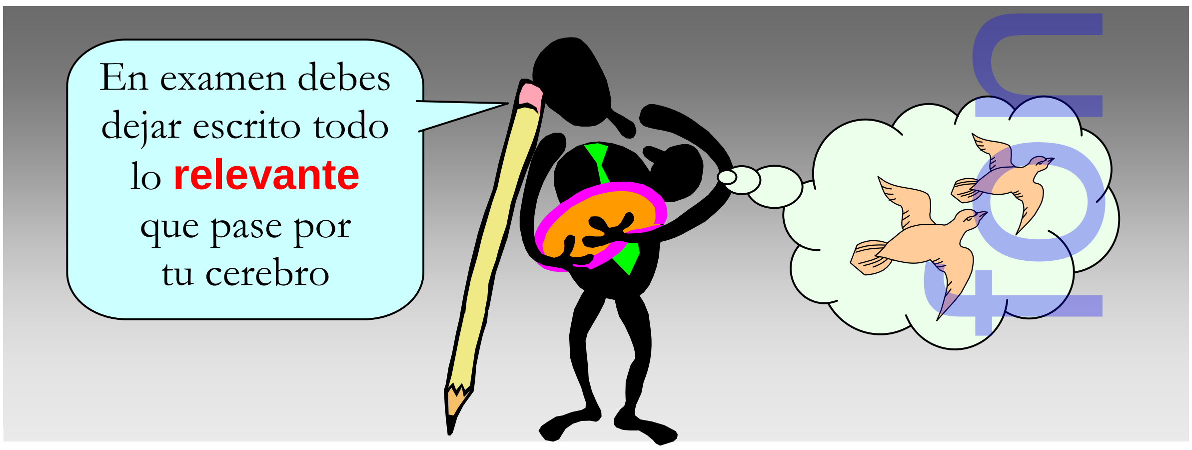
$$P(A \cap B) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A \cap B}{\text{número de casos posibles en } \Omega} = \frac{1}{6}$$

Si como resultado del experimento ha ocurrido el suceso A, el espacio muestral queda reducido a dicho suceso, que es el nuevo universo referencial:; así, es:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \equiv \frac{\text{masa de } B \cap A}{\text{masa de A}} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$$



Si al realizar el experimento ha ocurrido el suceso A, la probabilidad del suceso B/A es la **proporción** entre la probabilidad (masa) del suceso $B \cap A$ y la probabilidad (masa) del suceso A, que es el nuevo universo referencial.



FONEMATO 1.12.5

Se lanza un dado de seis caras trucado de modo que los números pares se obtienen la mitad de veces que los impares.

1) Calcúlese la probabilidad de obtener un número mayor que 3 si se sabe que se ha obtenido un número par.
2) Calcúlese la probabilidad de obtener un número par si se sabe que se ha obtenido un número mayor que 3.

SOLUCIÓN

Si los números pares se obtienen la mitad de veces que los impares, es:

$$P(1)=P(3)=P(5)=a\ ;\ P(2)=P(4)=P(6)=a/2$$

Al exigir que la probabilidad del suceso seguro Ω sea 1 resulta $a=2/9$:

$$P(\Omega)=1\Rightarrow P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+\frac{a}{2}+a+\frac{a}{2}+a+\frac{a}{2}=1\Rightarrow\frac{9}{2}.a=1\Rightarrow a=\frac{2}{9}$$

Siendo $A=\{2,4,6\}$ el suceso de obtener un número par y $B=\{4,5,6\}$ el suceso de obtener un número mayor que 3, es:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\equiv\frac{\text{masa de } B\cap A}{\text{masa de } A}=\frac{2/9}{1/3}=\frac{2}{3}$$

VENTANA

$$P(A)=P(2\cup 4\cup 6)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

$$B\cap A=\{4,6\}\Rightarrow P(B\cap A)=P(4\cup 6)=P(4)+P(6)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

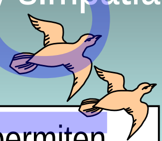
$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\equiv\frac{\text{masa de } A\cap B}{\text{masa de } B}=\frac{2/9}{4/9}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(B)=P(4\cup 5\cup 6)=P(4)+P(5)+P(6)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso A/B converge en probabilidad a $1/2$; es decir, sin más que repetir el experimento un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $1/2$ tanto como queramos.

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación.

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.12.6

Se dispone de tres palillos, uno de los cuales es corto.

Tres personas A, B y C seleccionan en ese orden un palillo, y pierde el que saque el palillo corto. Determínese la probabilidad de perder que tiene cada jugador.

SOLUCIÓN

Sea C_i el suceso de que el i-ésimo palillo elegido $(i = 1,2,3)$ sea el corto.

- Pierde A si el primer palillo es el corto, es decir, si ocurre el suceso C_1; así: $P(\text{pierde A}) = P(C_1) = 1/3$.

- Pierde B si el segundo palillo es el corto, es decir, si ocurre $\overline{C}_1 \cap C_2$; así:

$$P(\text{pierde B}) = P(\overline{C}_1 \cap C_2) = P(\overline{C}_1).P(C_2/\overline{C}_1) = 1/3$$

$P(\overline{C}_1) = 2/3$: inicialmente 2 de los 3 palillos no son cortos
$P(C_2/\overline{C}_1) = 1/2$: si ocurre $\overline{C}_1$ quedan 2 palillos de los que 1 es corto

- Pierde C si el tercer palillo es el corto, es decir, si ocurre $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3$; así:

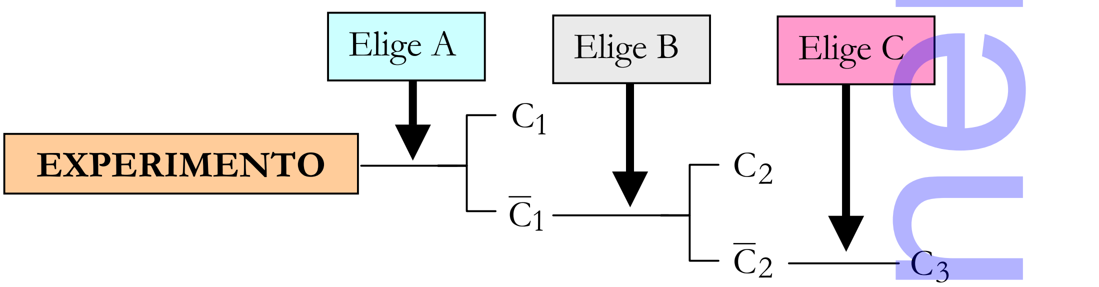
$$P(\text{pierde C}) = P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) = P(\overline{C}_1).P(\overline{C}_2/\overline{C}_1).P(C_3/\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = 1/3$$

$P(\overline{C}_1) = 2/3$
$P(\overline{C}_2/\overline{C}_1) = 1/2$: si ocurre $\overline{C}_1$ quedan 2 palillos, de los que 1 no es corto
$P(C_3/\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = 1$: si ocurre $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2$ sólo queda el palillo corto

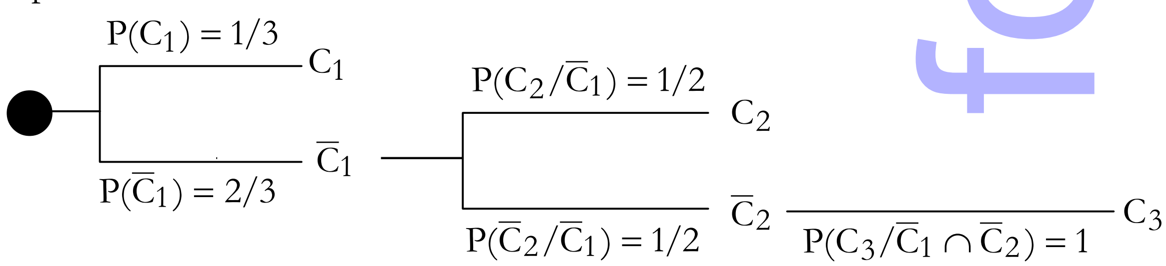
VENTANA

Very important note

Como sucederá en muchos ejercicios, estamos ante un **experimento aleatorio por etapas** (en nuestro caso hay tres etapas: en la primera elige palillo el jugador A, en la segunda elige B y en la tercera elige C), **que puede visualizarse mediante un esquema en forma de árbol:**



En el siguiente esquema se indican las probabilidades correspondientes a cada etapa:



FONEMATO 1.12.7

De una urna con 9 bolas rojas y 5 negras se extraen sucesivamente y sin reposición tres bolas. Calcúlese la probabilidad de que las dos primeras sean negras y la tercera sea roja.

SOLUCIÓN

Sea R_i el suceso de que la i-ésima bola que se extrae $(i = 1,2,3)$ sea roja y N_i el suceso de que dicha bola sea negra. El suceso de que las dos primeras bolas sean negras y la tercera sea roja es el $N_1 \cap N_2 \cap R_3$, siendo:

$$P(N_1 \cap N_2 \cap R_3) = P(N_1).P(N_2/N_1).P(R_3/N_1 \cap N_2) = \frac{5}{14}.\frac{4}{13}.\frac{9}{12}$$

según la regla de la multiplicación

- $P(N_1) = 5/14$, pues inicialmente hay 14 bolas de las que 5 son negras
- $P(N_2/N_1) = 4/13$, pues siendo negra la primera, entre las 13 bolas que quedan hay 4 negras
- $P(R_3/N_1 \cap N_2) = 9/12$, pues siendo negras las dos primeras, entre las 12 bolas que quedan hay 9 rojas

El siguiente esquema en forma de árbol visualiza las **tres etapas** del experimento. **La regla de la multiplicación permite calcular la probabilidad de cada uno de los ocho posibles resultados.**

- R_1
  - R_2
    - $R_3 \Rightarrow$ ocurre $R_1 \cap R_2 \cap R_3$
    - $N_3 \Rightarrow$ ocurre $R_1 \cap R_2 \cap N_3$
  - N_2
    - $R_3 \Rightarrow$ ocurre $R_1 \cap N_2 \cap R_3$
    - $N_3 \Rightarrow$ ocurre $R_1 \cap N_2 \cap N_3$
- N_1
  - R_2
    - $R_3 \Rightarrow$ ocurre $N_1 \cap R_2 \cap R_3$
    - $N_3 \Rightarrow$ ocurre $N_1 \cap R_2 \cap N_3$
  - N_2
    - $R_3 \Rightarrow$ ocurre $N_1 \cap N_2 \cap R_3$
    - $N_3 \Rightarrow$ ocurre $N_1 \cap N_2 \cap N_3$

Se nos pide la probabilidad del suceso $N_1 \cap N_2 \cap R_3$

Las correspondientes probabilidades de los restantes siete posibles resultados de nuestro experimento de tres etapas son:

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1).P(R_2/R_1).P(R_3/R_1 \cap R_2) = \frac{9}{14}.\frac{8}{13}.\frac{7}{12}$$

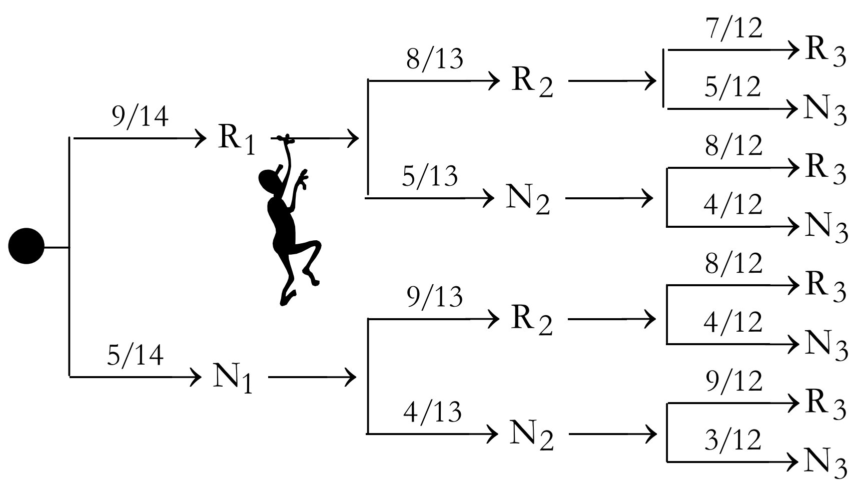
$$P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(R_1).P(R_2/R_1).P(N_3/R_1 \cap R_2) = \frac{9}{14}.\frac{8}{13}.\frac{5}{12}$$

$$P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) = P(R_1).P(N_2/R_1).P(R_3/R_1 \cap N_2) = \frac{9}{14}.\frac{5}{13}.\frac{8}{12}$$

$$P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(R_1).P(N_2/R_1).P(N_3/R_1 \cap N_2) = \frac{9}{14}.\frac{5}{13}.\frac{4}{12}$$

$$P(N_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(N_1).P(R_2/N_1).P(R_3/N_1 \cap R_2) = \frac{5}{14}.\frac{9}{13}.\frac{8}{12}$$
$$P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(N_1).P(R_2/N_1).P(N_3/N_1 \cap R_2) = \frac{5}{14}.\frac{9}{13}.\frac{4}{12}$$
$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1).P(N_2/N_1).P(N_3/N_1 \cap N_2) = \frac{5}{14}.\frac{4}{13}.\frac{3}{12}$$

En el siguiente árbol se indican las probabilidades correspondientes a cada etapa:



FONEMATO 1.12.8

1) Siendo A y B sucesos incompatibles, pruébese que:

$$P(A/A\cup B)=P(A)/(P(A)+P(B))$$

2) Pruébese que $P(B/A)\geq 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$, si $P(A)>0$ y $P(B/A)>0$.

SOLUCIÓN

según la definición de probabilidad condicionada

1) $$P(A/A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

$\boxed{A\cap(A\cup B)=A}$

$\boxed{A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

2) $$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(A)}\geq$$

$$\boxed{\begin{array}{l}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B\cap A)\Rightarrow\\ \Rightarrow P(B\cap A)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\end{array}}$$

$$\geq\frac{P(A)+P(B)-1}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}-\frac{1-P(B)}{P(A)}=$$

$\boxed{\text{pues } 0\leq P(A\cup B)\leq 1}$

$$=1-\frac{1-P(B)}{P(A)}=1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}$$

FONEMATO 1.12.9

Calcúlese $P\left((A\Delta B)/(A\cup B)\right)$, siendo A y B sucesos tales que:

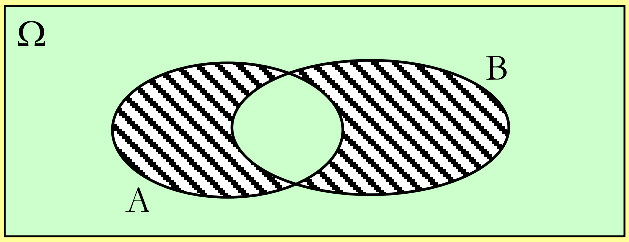
$$P(A)=0'4\ ;\ P(B)=0'3\ ;\ P(A\cap B)=0'1$$

SOLUCIÓN

según la definición de probabilidad condicionada

$$P\left((A\Delta B)/(A\cup B)\right)=\frac{P\left((A\Delta B)\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

VENTANA



$A\Delta B\equiv$ (zona rayada) $\Rightarrow (A\Delta B)\cap(A\cup B)=A\Delta B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'4+0'3-0'1=0'6$$
$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0'6-0'1=0'5$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso $(A\Delta B)/(A\cup B)$ **converge en probabilidad** a 5/6; es decir, sin más que repetir el experimento un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a 5/6 tanto como queramos.

Latiguillo: párrafo corto o esquema que explica lo fundamental del asunto que llevamos entre manos.

FONEMATO 1.12.10

Calcúlese $P(A\cup B\cup C\cup D)$. Si cuatro matrimonios van a clases de baile y el profesor empareja al azar cada mujer con un hombre, calcúlese la probabilidad de que alguna mujer baile con su marido.

SOLUCIÓN

1) Es:

$$P(A\cup B\cup C\cup D)=P\big(A\cup(B\cup C\cup D)\big)=$$
$$=P(A)+P(B\cup C\cup D)-P\big(A\cap(B\cup C\cup D)\big)=$$
$$=P(A)+P(B\cup C\cup D)-P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)\big)=$$

$$\boxed{A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)}$$

- $P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)-$
  $-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+P(B\cap C\cap D)$
- $P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)\big)=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(A\cap D)-$
  $-P(A\cap B\cap C)-P(A\cap B\cap D)-P(A\cap C\cap D)+P(A\cap B\cap C\cap D)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-$$
$$-P(B\cap D)-P(C\cap D)+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+$$
$$+P(A\cap C\cap D)+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)$$

2) Siendo M_i el suceso de que la i-ésima mujer baile con su marido, el suceso M de que alguna mujer baile con su marido es $M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$:

$$P(M)=P(M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4)=$$
$$=P(M_1)+P(M_2)+P(M_3)+P(M_4)-P(M_1\cap M_2)-P(M_1\cap M_3)-$$
$$-P(M_1\cap M_4)-P(M_2\cap M_3)-P(M_2\cap M_4)-P(M_3\cap M_4)+$$
$$+P(M_1\cap M_2\cap M_3)+P(M_1\cap M_2\cap M_4)+P(M_1\cap M_3\cap M_4)+$$
$$+P(M_2\cap M_3\cap M_4)-P(M_1\cap M_2\cap M_3\cap M_4)=$$
$$=4.\frac{1}{4}-6.\frac{1}{12}+4.\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=\frac{15}{24}$$

VENTANA

- $P(M_i)=\frac{1}{4},\ \forall\ i=1,2,3,4$
- $P(M_i\cap M_j)=P(M_i).P(M_j/M_i)=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$, y hay 6 casos de estos
- $P(M_i\cap M_j\cap M_k)=P(M_i).P(M_j/M_i).P(M_k/M_i\cap M_j)=$
  $=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$, y hay 4 casos de estos
- $P(M_1\cap M_2\cap M_3\cap M_4)=$
  $=P(M_1).P(M_2/M_1).P(M_3/M_1\cap M_2).P(M_4/M_1\cap M_2\cap M_3)=$
  $=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{24}$

FONEMATO 1.12.11

1) Pruébese que si $P(A/B) > P(A)$, entonces $P(B/A) > P(B)$.

2) ¿Es cierto que si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A/C) > P(B/C)$?

SOLUCIÓN

1) Se tiene que:

según la definición de probabilidad condicionada

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} > P(A) \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} > P(B) \Rightarrow P(B/A) > P(B)$$

lo garantiza el enunciado

es sabido que $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B/A)$

2) Siendo

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \;;\; P(B/C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

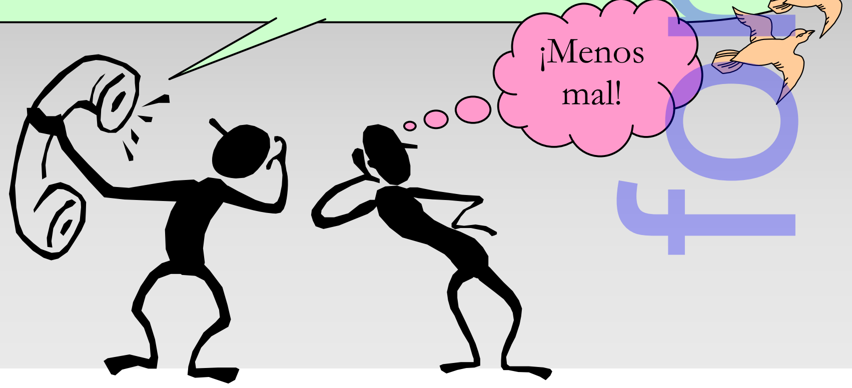
sucederá que $P(A/C) > P(B/C)$ si $P(A\cap C) > P(B\cap C)$, lo que no está garantizado si $P(A) > P(B)$.

Por ejemplo, piensa que "A" es el suceso de vivir en Europa, "B" el suceso de vivir en Mauritania y "C" el suceso de ser pobre.

El asunto de la probabilidad condicionada lo encontraremos más adelante con enunciados en que intervendrán variables aleatorias. ***Por ejemplo,*** nos dirán que la aleatoria altura X de los ciudadanos tiene distribución normal con media 170 cm y desviación típica 3 cm, y pedirán la probabilidad de que un ciudadano mida menos de 171 cm si se sabe que mide más de 168 cm, lo que es una gilipollez: ha ocurrido el suceso $X > 168$ y se pide la probabilidad del suceso $X < 171 / X > 168$:

$$P(X < 171 / X > 168) = \frac{P\big((X < 171)\cap(X > 168)\big)}{P(X > 168)} = \frac{P(168 < X < 171)}{P(X > 168)}$$

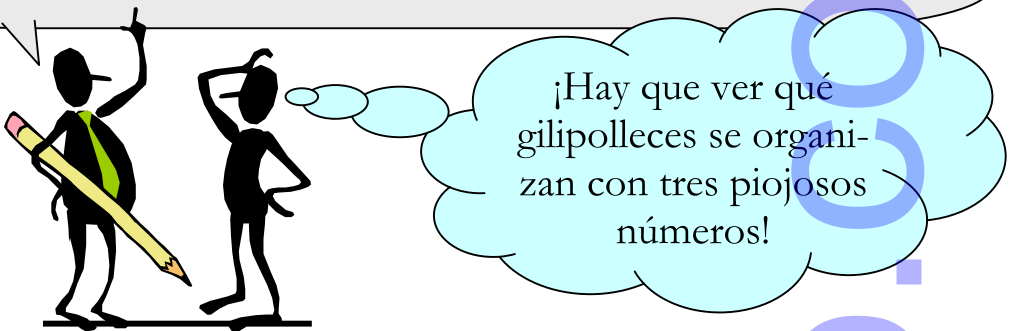
Lo único que te falta es aprender a calcular la probabilidad de los sucesos $X > 168$ y $168 < X < 171$ ... pero de eso no te preocupes ahora.



1.13 INDEPENDENCIA DE SUCESOS

- Se dice que dos sucesos "A" y "B" de un experimento aleatorio son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$; si "A" y "B" no son independientes se dice que son **dependientes.**

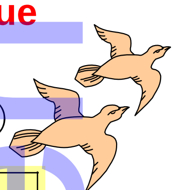
Por ejemplo: "A" y "B" no son independientes si $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'5$ y $P(A \cap B) = 0'1$, pues $P(A \cap B) = 0'1 \neq 0'2 = P(A).P(B)$. Sin embargo, si $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'5$ y $P(A \cap B) = 0'2$, los sucesos "A" y "B" son independientes, pues $P(A \cap B) = 0'2 = P(A).P(B)$



- Siendo Ω el espacio muestral del experimento (es decir, Ω es la tarta de una unidad de masa de probabilidad que todo experimento aleatorio lleva pegada a su chepa), si los sucesos "A" y "B" son independientes sucede que

$$\frac{\text{masa de } B \cap A}{\text{masa de } A} \equiv P(B/A) = P(B) \equiv \frac{\text{masa de } B}{\text{masa de } \Omega}$$
$$\frac{\text{masa de } A \cap B}{\text{masa de } B} \equiv P(A/B) = P(A) \equiv \frac{\text{masa de } A}{\text{masa de } \Omega}$$

O sea, **si "A" y "B" son independientes, la probabilidad de que ocurra uno de ellos no se ve alterada por el hecho de que ocurra o no el otro.** En efecto:



$$P(A \cap B) \underset{\text{regla de la multiplicación}}{=} P(A).P(B/A) \underset{\text{si A y B son independientes}}{=} P(A).P(B) \Rightarrow P(B/A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) \underset{\text{regla de la multiplicación}}{=} P(B).P(A/B) \underset{\text{si A y B son independientes}}{=} P(A).P(B) \Rightarrow P(A/B) = P(A)$$

- Todo suceso es independiente del suceso imposible $\varnothing$ y del suceso seguro Ω, pues siendo $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = 1$, para todo suceso A sucede que:

$$P(A \cap \varnothing) \underset{\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}}{=} P(\varnothing) = 0 = P(A).P(\varnothing) \; ; \; P(A \cap \Omega) \underset{\boxed{A \cap \Omega = A}}{=} P(A) = P(A).P(\Omega)$$

- Si A y B son independientes (o sea, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$), entonces:

1) los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes, pues $P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(\overline{B})$
2) los sucesos $\overline{A}$ y B son independientes, pues $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}).P(B)$
3) los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes, pues $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$

En efecto:

1) $$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow$$

pues $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son incompatibles

$$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).P(B) =$$

Es $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, pues A y B son independientes

$$= P(A).(1 - P(B)) = P(A).P(\overline{B})$$

2) $$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow$$

pues $(B \cap A)$ y $(B \cap \overline{A})$ son incompatibles

$$\Rightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A).P(B) =$$

Es $P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$, pues A y B son independientes

$$= P(B).(1 - P(A)) = P(B).P(\overline{A})$$

3) Según Morgan, es $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$; por tanto:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B) = 1 - P(A) - P(B).(1 - P(A)) =$$

Es $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, pues A y B son independientes

$$= (1 - P(A)).(1 - P(B)) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

- Considera que "F" es una **familia** formada por tres o más sucesos:

1) Se dice que los sucesos que forman "F" son **independientes dos a dos** si $\forall\ A,B \in F$ sucede que $P(A \cap B) = P(A).P(B)$; si la familia "F" la forman tres sucesos A, B y C, debe suceder que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \ ; \ P(A \cap C) = P(A).P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B).P(C)$$

2) Se dice que "F" es una **familia completamente independiente** si para cualquier subfamilia $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ se verifica que

$$P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k) = P(S_1).P(S_2) \dots P(S_k)$$

Si la familia "F" la forman tres sucesos A, B y C, debe suceder que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \ ; \ P(A \cap C) = P(A).P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B).P(C) \ ; \ P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

pues las subfamilias que pueden formarse con tres sucesos A, B y C son:

$$\{A,B\} \ ; \ \{A,C\} \ ; \ \{B,C\} \ ; \ \{A,B,C\}$$

FONEMATO 1.13.1

El 82 % de los alumnos de un curso de ordeño de moscas con guantes de boxeo traduce ruso, el 68 % traduce francés y 60 % traduce ambos idiomas.

1) ¿Hay independencia?
2) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce al menos uno de los dos.
3) Calcúlese el porcentaje de alumnos que no traduce ninguno.
4) Calcúlese el porcentaje de alumnos que no traduce al menos uno de los dos.
5) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce francés pero no ruso.
6) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce ruso pero no francés.
7) Entre los alumnos que traducen francés, ¿qué porcentaje traduce ruso?

SOLUCIÓN

1) Siendo R el suceso de que un estudiante traduzca ruso y F el suceso de que traduzca francés, se nos dice que $P(R)=0'82$, $P(F)=0'68$ y $P(R\cap F)=0'6$.

   Los sucesos R y F no son independientes, pues $P(R\cap F)\neq P(R).P(F)$.

1) El porcentaje que traduce al menos uno de los dos idiomas es del 90 %, pues:

$$P(R\cup F)=P(R)+P(F)-P(R\cap F)=0'82+0'68-0'6=0'9$$

2) El porcentaje que no traduce ninguno de los dos idiomas es del 10 %, pues:

$$P(\overline{R}\cap\overline{F})=P(\overline{R\cup F})=1-P(R\cup F)=1-0'9=0'1$$

leyes de Morgan

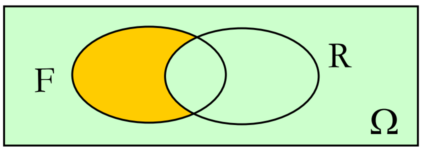
4) El porcentaje que no traduce al menos uno de los dos idiomas es del 40 %:

$$P(\overline{R}\cup\overline{F})=P(\overline{R\cap F})=1-P(R\cap F)=1-0'6=0'4$$

leyes de Morgan

5) El porcentaje que traduce francés pero no ruso es del 8 %, pues:

$$P(\overline{R}\cap F)=P(F)-P(R\cap F)=0'68-0'6=0'08$$



6) El porcentaje que traduce ruso pero no francés es del 22 %, pues:

$$P(R\cap\overline{F})=P(R)-P(R\cap F)=0'82-0'6=0'22$$

7) Entre los alumnos que traducen francés, el porcentaje que traduce ruso es aproximadamente del $88'2352941\ \%$, pues:

$$P(R/F)=\frac{P(R\cap F)}{P(F)}=\frac{0'6}{0'68}=0'882352941$$

según la definición de probabilidad condicionada

FONEMATO 1.13.2

Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio, siendo:

$$P(A) = 0'6 \;\; ; \;\; P(B) = 0'7 \;\; ; \;\; P(A \cup B) = 0'3 + P(A \cap B)$$

Calculee $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son independientes A y B? ¿Es $P(A/B) = 0'6$?

SOLUCIÓN

1) Es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'7 - P(A \cap B)$; o sea:

$$P(A \cup B) = 1'3 - P(A \cap B) \quad \text{(I)}$$

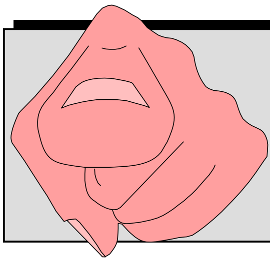
El enunciado nos dice que $P(A \cup B) = 0'3 + P(A \cap B)$ (II)

Puedes comprobar que la solución del sistema de ecuaciones que forman (I) y (II) es $P(A \cup B) = 0'8$ y $P(A \cap B) = 0'5$.

2) Los sucesos A y B no son independientes, pues

$$P(A).P(B) = 0'42 \neq 0'5 = P(A \cap B)$$

3) Como A y B no son independientes y $P(A) = 0'6$, podemos apostar tranquilamente un brazo a que $P(A/B) \neq P(A) = 0'6$.



TODO ERROR CONCEPTUAL GORDO ANULA EL EFECTO DE LOS LATIGUILLOS Y TE DEJA CON EL CULO AL AIRE.

FONEMATO 1.13.3

Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio, siendo:

$$P(A)=0'5 \;;\; P(B)=0'8 \;;\; P(A\cap B)=0'4$$

1) ¿Son compatibles A y B?
2) ¿Son independientes A y B?
3) Calcúlense $P(\overline{B}/A)$ y $P(\overline{A}\cup B)$.

SOLUCIÓN

1) Los sucesos A y B son compatibles, es decir, pueden ocurrir a la vez, pues su intersección tiene probabilidad no nula.

2) Los sucesos A y B son independientes, pues $P(A\cap B)=0'4=P(A).P(B)$.

3) El suceso $\overline{B}/A$ es el complementario del B/A; por tanto:

$$P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)=1-0'8=0'2$$

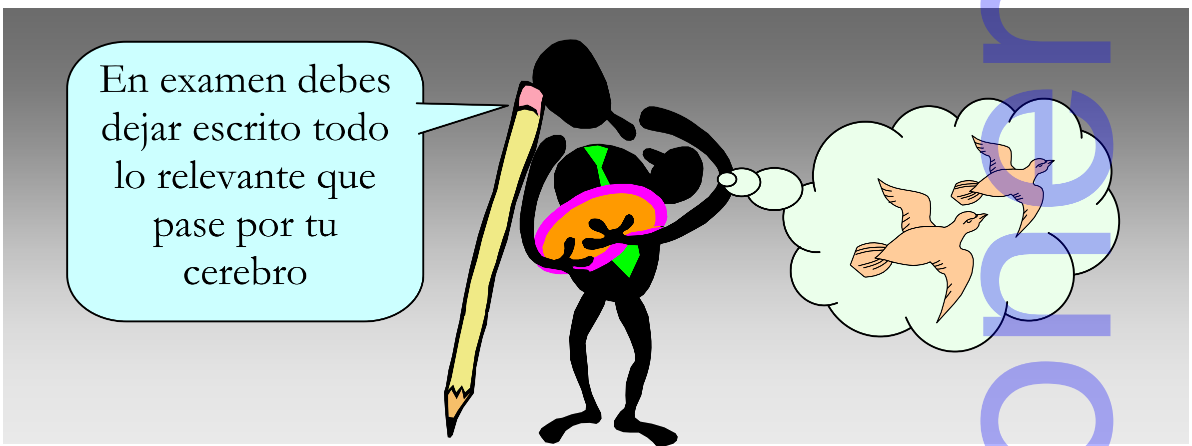
$$\boxed{A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow P(B/A)=P(B)=0'8}$$

Es: $$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=0'5+0'8-0'4=\boxed{0'9}$$

VENTANA

* $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0'5=0'5$
* $P(B)=0'8$
* $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0'8-0'4=0'4$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso $\overline{A}\cup B$ **converge en probabilidad** a $0'9$; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $0'9$ tanto como queramos.



FONEMATO 1.13.4

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0'3,\ P(B)=k\ \text{ y }\ P(A\cup B)=0'8$.

1) ¿Para qué valor de "k" son incompatibles A y B?
2) ¿Para qué valor de "k" son independientes A y B?

SOLUCIÓN

1) Los sucesos A y B son incompatibles si no pueden ocurrir a la vez, es decir, si $P(A\cap B)=0$; en tal caso sucede que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Por tanto, A y B son incompatibles si $0'8=0'3+k\Rightarrow k=0'5$

2) Los sucesos A y B son independientes si $P(A\cap B)=P(A).P(B)$; al exigir que se satisfaga tal condición resulta $k=5/7$:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow k-0'5=0'3.k\Rightarrow k=5/7$$

$$*\ P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0'3+k-0'8=k-0'5$$
$$*\ P(A).P(B)=0'3.k$$
VENTANA

Acostúmbrate a usar ventanas, pues facilitan mucho la lectura de lo escrito, por lo que el profesor que corrija tu examen te lo agradecerá con su cariño y simpatía

Pedrusco "K" = Pedrusco "T"

VENTANA

Razonamientos o cálculos que permiten pasar de un lado a otro del "=" o de "⇒"

Pedrusco "K" ⇒ Pedrusco "T"

FONEMATO 1.13.5

1) Demuéstrese que si dos sucesos A y B de probabilidad no nula son incompatibles entonces son dependientes.
2) ¿Son independientes dos sucesos compatibles?

SOLUCIÓN

1) Si A y B son incompatibles (no pueden ocurrir a la vez) es $P(A\cap B)=0$. Así, siendo $P(A)>0$ y $P(B)>0$ es $P(A\cap B)=0\neq P(A).P(B)$; por tanto, A y B son dependientes.

El recíproco no es cierto: puede suceder que dos sucesos sean dependientes y no incompatibles.

Por ejemplo, en el experimento de elegir al azar un número natural no superior a cinco, los sucesos $A=\{1,3,5\}$ y $B=\{1,2,3,4\}$ no son incompatibles (pues $A\cap B=\{1,3\}\neq\varnothing$) y son dependientes, pues:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/5}{4/5}=\frac{1}{2}\neq P(A)=\frac{3}{5}$$

2) **Dos sucesos compatibles pueden ser independientes o no.**

Por ejemplo, si

$$P(A)=0'4,\ P(B)=0'5 \text{ y } P(A\cap B)=0'1$$

los sucesos A y B son compatibles, pero no son independientes, pues

$$P(A\cap B)=0'1\neq 0'2=P(A).P(B)$$

Si $P(A)=0'4,\ P(B)=0'5$ y $P(A\cap B)=0'2$, los sucesos A y B son compatibles e independientes, pues $P(A\cap B)=0'2=P(A).P(B)$.

FONEMATO 1.13.6

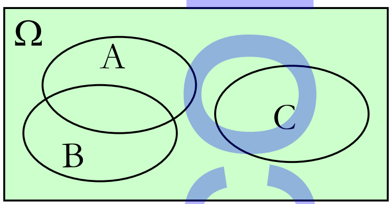
Sean A, B y C tres sucesos correspondientes a un experimento aleatorio. Se sabe que los sucesos $A \cup B$ y C son incompatibles; además:

$$P(A) = 0'4 \;;\; P(C) = 0'3 \;;\; P(A \cap B) = 0'1 \;;\; P(A \cup B \cup C) = 0'9$$

Calcúlense $P(B)$, $P(A/\overline{C})$ y $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

SOLUCIÓN

- Siendo incompatibles los sucesos $A \cup B$ y C, es obvio que A y C son incompatibles, lo mismo que B y C; es decir:



$$P(A \cap C) = 0 \;;\; P(B \cap C) = 0$$

También es obvio que $A \cap B \cap C = \varnothing$; así:

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Al exigir que $P(A \cup B \cup C) = 0'9$, resulta $P(B) = 0'3$:

$$P(A \cup B \cup C) = 0'9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0'9 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A) = 0'4 \;;\; P(C) = 0'3 \;;\; P(A \cap B) = 0'1 \\ P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0 \;;\; P(A \cap B \cap C) = 0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow 0'4 + P(B) + 0'3 - 0'1 - 0 - 0 - 0 = 0'9 \Rightarrow P(B) = 0'3$$

También puedes lidiar así:

$$P(A \cup B \cup C) = P\big((A \cup B) \cup C\big) = P(A \cup B) + P(C) = 0'9 \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{pues } A \cup B \text{ y C son incompatibles}}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) + 0'3 = 0'9 \Rightarrow P(A \cup B) = 0'6 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(C) = 0'3}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(A) = 0'4 \;;\; P(A \cap B) = 0'1}$$

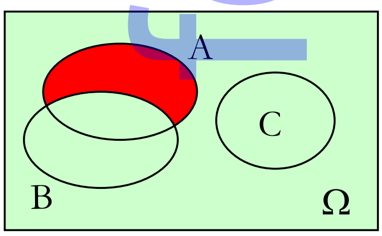
$$\Rightarrow 0'4 + P(B) - 0'1 = 0'6 \Rightarrow P(B) = 0'3$$

- Es:

$$P(A/\overline{C}) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0'4}{0'7}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Como } A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \subset \overline{C} \Rightarrow P(A \cap \overline{C}) = P(A) = 0'4 \\ P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0'3 = 0'7 \end{array}}$$

- Observando la figura resulta evidente que el suceso $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ corresponde a la zona roja, y es:



$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) = 0'4 - 0'1 = 0'3$$

FONEMATO 1.13.7

Un par de dados se lanzan dos veces y cada vez se observa el valor de la suma de los resultados obtenidos. Calcúlese la probabilidad de obtener suma siete

1) Una vez ; 2) Al menos una vez ; 3) Dos veces

SOLUCIÓN

Como es sabido, al lanzar dos dados al aire pueden obtenerse 36 posibles resultados $(1;1), (1;2), \ldots\ldots, (6;6)$, de los que sólo 6 son favorables al suceso de que la suma sea siete:

$$(1;6)\ ;\ (2;5)\ ;\ (3;4)\ ;\ (4;3)\ ;\ (5;2)\ ;\ (6;1)$$

En consecuencia, la probabilidad de obtener suma 7 al lanzar dos dados una vez es $6/36 = 1/6$.

Siendo S_k el suceso de obtener suma igual a 7 en el k-ésimo lanzamiento del par de dados $(k = 1{,}2)$, es claro que los sucesos S_1 y S_2 son independientes, pues el resultado que se obtiene en un lanzamiento no condiciona el resultado que se obtiene en el otro.

1) Se obtiene suma 7 una vez si ocurre el suceso $(S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2)$:

pues los sucesos $(S_1 \cap \bar{S}_2)$ y $(\bar{S}_1 \cap S_2)$ son incompatibles

$$P\big((S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2)\big) = P(S_1 \cap \bar{S}_2) + P(\bar{S}_1 \cap S_2) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$$

- Como S_1 y S_2 son independientes, S_1 y $\bar{S}_2$ también lo son; así:

$$P(S_1 \cap \bar{S}_2) = P(S_1).P(\bar{S}_2) = \frac{5}{36}$$

VENTANA

$$P(S_1) = \frac{1}{6}.\ ;\ P(\bar{S}_2) = 1 - P(S_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

- Como S_1 y S_2 son independientes, $\bar{S}_1$ y S_2 también lo son; así:

$$P(\bar{S}_1 \cap S_2) = P(\bar{S}_1).P(S_2) = \frac{5}{36}$$

$$P(\bar{S}_1) = 1 - P(S_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\ ;\ P(S_2) = \frac{1}{6}$$

2) Se obtiene suma 7 al menos una vez si ocurre el suceso $S_1 \cup S_2$:

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) =$$

$$= P(S_1) + P(S_2) - P(S_1).P(S_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

pues los sucesos S_1 y S_2 son independientes

3) Se obtiene suma 7 dos veces si ocurre el suceso $S_1 \cap S_2$, y como S_1 y S_2 son independientes, es:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1).P(S_2) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

FONEMATO 1.13.8

Pruébese que $P(A/B)=P(A/\overline{B})$ si y sólo si A y B son independientes.

SOLUCIÓN

$\boxed{\Rightarrow}$

$$P(A/B)=P(A/\overline{B})\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\Rightarrow$$

según la definición de probabilidad condicionada

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{1-P(B)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).P(A\cap B)=P(B).P(A\cap\overline{B})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B).\big(P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B).P(A)\Rightarrow \text{A y B son independientes}$$

Como los sucesos $(A\cap B)$ y $(A\cap\overline{B})$ son incompatibles, es:

$$P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P\big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big)=P(A)$$

pues $(A\cap B)\cup P(A\cap\overline{B})=A$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\text{A y B son independientes}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P\big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big).P(B)\Rightarrow$$

pues $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\big(P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\big).P(B)\Rightarrow$$

VENTANA

Como los sucesos $(A\cap B)$ y $(A\cap\overline{B})$ son incompatibles, es:

$$P\big((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\big)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A\cap B).P(B)+P(A\cap\overline{B}).P(B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B).(1-P(B))=P(A\cap\overline{B}).P(B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B).P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B}).P(B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}\Rightarrow P(A/B)=P(A/\overline{B})$$

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A/B)\ ;\ \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A/\overline{B})$$

Serás un **gran pardillo** si en exámen, tras averiguar que "p" es la probabilidad de un suceso "Pepe", no dejas escrito lo que eso significa: **la frecuencia relativa de "Pepe" converge en probabilidad a "p"; o sea, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de "Pepe" se aproxima a "p" tanto como se quiera.**

FONEMATO 1.13.9

Pruébese que:

1) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}).P(\overline{B})\Rightarrow$ A y B son independientes

2) $P(A/B)+P(\overline{A}/\overline{B})=1\Rightarrow$ A y B son independientes

SOLUCIÓN

1) Se tiene que: $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}).P(\overline{B})\Rightarrow$

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(\overline{A}).P(\overline{B})\Rightarrow$$

$$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)\ ;\ P(\overline{B})=1-P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-(1-P(A)).(1-P(B))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-(1-P(A)-P(B)+P(A).P(B))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow \text{A y B son independientes}$$

2) Se tiene que:

$$P(A/B)+P(\overline{A}/\overline{B})=1\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=1\Rightarrow$$

$$\boxed{\text{según la definición de probabilidad condicionada}}$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=1\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=1\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}*\ \text{según Morgan, es } P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})\\ *\ P(\overline{B})=1-P(B)\end{array}}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(A\cap B).P(B)+P(B)-P(B).P(A\cup B)=P(B).(1-P(B))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(A\cap B).P(B)-P(B).P(A\cup B)=-(P(B))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).(P(A\cap B)+P(A\cup B))=-(P(B))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).(P(A\cap B)+P(A)+P(B)-P(A\cap B))=-(P(B))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).(P(A)+P(B))=-(P(B))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).P(A)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B).P(A)\Rightarrow \text{A y B son independientes}$$

FONEMATO 1.13.10

Tres vecinos usan la misma línea de autobús para volver a casa. Cada uno, con independencia de los demás, elige el autobús de las 17 con probabilidad $1/4$, el de las 18 con probabilidad $1/2$ y el de las 19 con probabilidad $1/4$.
Calcúlese la probabilidad de que coincidan en el mismo autobús.

SOLUCIÓN

Si A_{ij} es el suceso de que el i-ésimo vecino $(i = 1,2,3)$ elija el j-ésimo autobús $(j = 1,2,3)$, los tres vecinos coinciden en el mismo autobús si ocurre el suceso $(A_{11} \cap A_{21} \cap A_{31}) \cup (A_{12} \cap A_{22} \cap A_{32}) \cup (A_{13} \cap A_{23} \cap A_{33})$, y es:

$$P\left(\underbrace{(A_{11} \cap A_{21} \cap A_{31})}_{W_1} \cup \underbrace{(A_{12} \cap A_{22} \cap A_{32})}_{W_2} \cup \underbrace{(A_{13} \cap A_{23} \cap A_{33})}_{w_3}\right) =$$

como los sucesos W_1, W_2 y W_3 son mutuamente excluyentes (si ocurre uno de ellos no ocurren los demás), la probabilidad de su unión es la suma de sus respectivas probabilidades

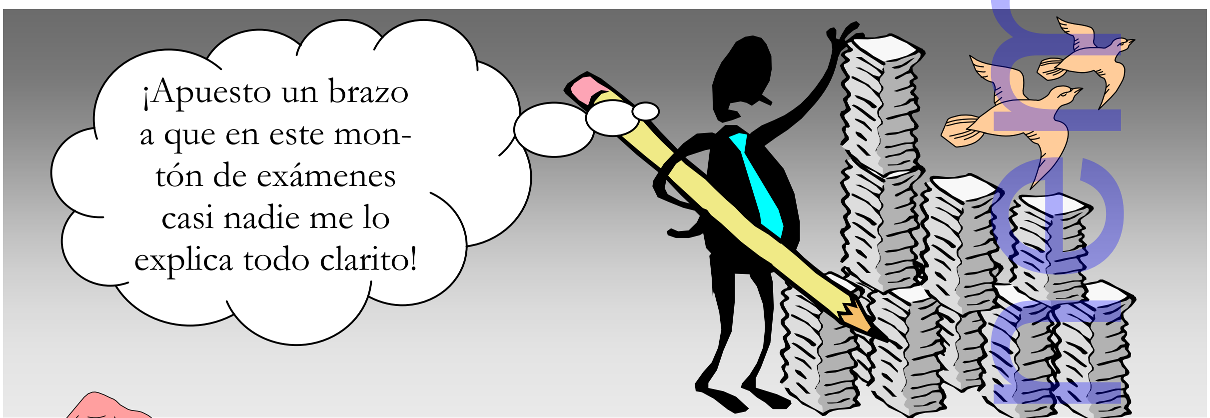
$$= P(A_{11} \cap A_{21} \cap A_{31}) + P(A_{12} \cap A_{22} \cap A_{32}) + P(A_{13} \cap A_{23} \cap A_{33}) =$$

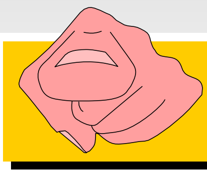
$$= (1/4)^3 + (1/2)^3 + (1/4)^3$$

VENTANA

debido a la completa independencia de los sucesos A_{ij}, es:

$$P(A_{11} \cap A_{21} \cap A_{31}) = P(A_{11}).P(A_{21}).P(A_{31}) = (1/4)^3$$
$$P(A_{12} \cap A_{22} \cap A_{32}) = P(A_{12}).P(A_{22}).P(A_{32}) = (1/2)^3$$
$$P(A_{13} \cap A_{23} \cap A_{33}) = P(A_{13}).P(A_{23}).P(A_{33}) = (1/4)^3$$





A tu profe le pasa como a ti: cuanto más clarito le explicas las cosas, más contento se pone.

FONEMATO 1.13.11

Sea $F = \{A,B,C\}$ una familia completamente independiente de sucesos.

Calcúlese $P\left(A \cup (\overline{B \cap C})\right)$ si $P(A) = 0'2$, $P(B) = 0'4$ y $P(C) = 0'5$.

SOLUCIÓN

Siendo $F = \{A,B,C\}$ una familia de sucesos completamente independiente, es:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \;;\; P(A \cap C) = P(A).P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B).P(C) \;;\; P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Es: $$P\left(A \cup (\overline{B \cap C})\right) = P(A) + P(\overline{B \cap C}) - P\left(A \cap (\overline{B \cap C})\right) =$$

$$\boxed{P(\text{Pepe} \cup \text{Juan}) = P(\text{Pepe}) + P(\text{Juan}) - P(\text{Pepe} \cap \text{Juan})}$$

$$= 0'2 + 0'8 - 0'16 = \boxed{0'84}$$

VENTANA

- $P(A) = 0'2$
- $P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - P(B).P(C) = 1 - 0'4.0'5 = 0'8$
- Expresamos el suceso A como unión de dos sucesos disjuntos:

$$A = \left(A \cap (\overline{B \cap C})\right) \cup \left(A \cap (B \cap C)\right)$$

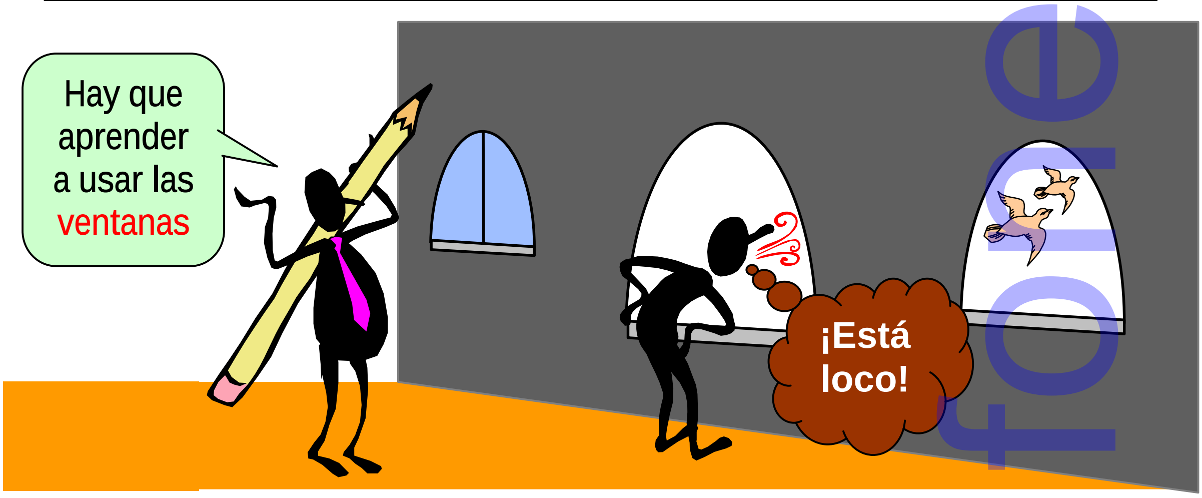
Por tanto $P(A) = P\left(A \cap (\overline{B \cap C})\right) + P\left(A \cap (B \cap C)\right)$, o sea:

$$P(A) = P\left(A \cap (\overline{B \cap C})\right) + P(A \cap B \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(A \cap (\overline{B \cap C})\right) = P(A) - P(A \cap B \cap C) = P(A) - P(A).P(B).P(C) =$$

$$= 0'2 - 0'2.0'4.0'5 = 0'16$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso $A \cup (\overline{B \cap C})$ **converge en probabilidad** a $0'84$; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $0'84$ tanto como queramos.



FONEMATO 1.13.12

Calcúlese la probabilidad de destruir el polvorín donde los malos guardan las armas de destrucción masiva si los buenos le disparamos tres misiles gordos y, con completa independencia unos de otros, la probabilidad de hacer blanco con cada disparo es $0'2$.

SOLUCIÓN

Siendo B_i el suceso de hacer blanco con el i-ésimo disparo $(i = 1,2,3)$, y considerando que el polvorín se destruye acertando algún disparo, nos piden la probabilidad del suceso $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$:

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1 \cap B_2) -$$
$$-P(B_1 \cap B_3) - P(B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$$
$$= 3.0'2 - 3.0'2^2 + 0'2^3 = 0'488$$

VENTANA

Es $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 0'2$, y como la familia que forman los sucesos B_1, B_2 y B_3 es completamente independiente, entonces:

$$P(B_i \cap B_j) = P(B_i).P(B_j) = 0'2^2, \text{ si } i \neq j$$
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1).P(B_2).P(B_3) = 0'2^3$$

También puedes lidiar así:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3}) = 1 - P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3) = \boxed{1 - 0'8^3}$$

leyes de Morgan

como la familia que forman B_1, B_2 y B_3 es completamente independiente, lo mismo le pasa a la familia que forman $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ y $\overline{B}_3$; por tanto:

$$P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1).P(\overline{B}_2).P(\overline{B}_3) = (1 - 0'2)^3 = 0'8^3$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso A converge en probabilidad a $1 - 0'8^3$; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $1 - 0'8^3$ tanto como queramos.

FONEMATO 1.13.13

Pruébese que si $F=\{A,B,C\}$ es una familia completamente independiente de sucesos, también son completamente independientes las siguientes familias:

$$F_1=\{A,B,\overline{C}\}\ ;\ F_2=\{A,\overline{B},\overline{C}\}\ ;\ F_3=\{\overline{A},\overline{B},\overline{C}\}\ ;\ F_4=\{A,B,\Omega\}$$

SOLUCIÓN

El que $F=\{A,B,C\}$ sea una familia de sucesos completamente independiente significa que

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\ ;\ P(A\cap C)=P(A).P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B).P(C)\ ;\ P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

1) La familia $F_1=\{A,B,\overline{C}\}$ es completamente independiente si:

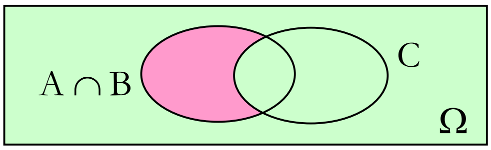
$$\begin{aligned}&a)\ P(A\cap B)=P(A).P(B)\\&b)\ P(A\cap\overline{C})=P(A).P(\overline{C})\\&c)\ P(B\cap\overline{C})=P(B).P(\overline{C})\\&d)\ P(A\cap B\cap\overline{C})=P(A).P(B).P(\overline{C})\end{aligned}$$

El enunciado garantiza que se satisface a).

Es: $$P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap C)=P(A)-P(A).P(C)=$$
$$=P(A).(1-P(C))=P(A).P(\overline{C})$$

Es: $$P(B\cap\overline{C})=P(B)-P(B\cap C)=P(B)-P(B).P(C)=$$
$$=P(B).(1-P(C))=P(B).P(\overline{C})$$

Es: $$P(A\cap B\cap\overline{C})=P\big((A\cap B)\cap\overline{C}\big)=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=$$



$$=P(A).P(B)-P(A).P(B).P(C)=P(A).P(B).(1-P(C))=P(A).P(B).P(\overline{C})$$

2) Para probar que la familia $F_2=\{A,\overline{B},\overline{C}\}$ es completamente independiente debemos probar que

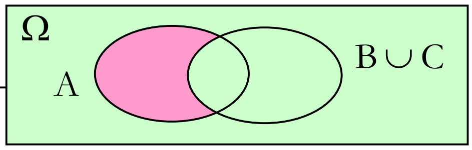
$$\begin{aligned}&a)\ P(A\cap\overline{B})=P(A).P(\overline{B})\\&b)\ P(A\cap\overline{C})=P(A).P(\overline{C})\\&c)\ P(\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{B}).P(\overline{C})\\&d)\ P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C})\end{aligned}$$

La demostración de a) y b) es análoga al caso anterior.

Es: $$P(\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{B\cup C})=1-P(B\cup C)=$$
$$=1-P(B)-P(C)+P(B\cap C)=1-P(B)-P(C)+P(B).P(C)=$$
$$=1-P(B)-P(C).(1-P(B))=(1-P(B)).(1-P(C))=P(\overline{B}).P(\overline{C})$$

Es: $$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P\big((A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\big)=P\big((A\cap(\overline{B\cup C})\big)=$$

$$= P(A) - P\big(A \cap (B \cup C)\big) = P(A) - P\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) =$$



$$= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

pues $F = \{A,B,C\}$ es completamente independiente

$$= P(A) - P(A).P(B) - P(A).P(C) + P(A).P(B).P(C) =$$
$$= P(A).(1 - P(B)) - P(A).P(C) + P(A).P(B).P(C) =$$
$$= P(A).P(\overline{B}) - P(A).P(C) + P(A).P(B).P(C) =$$
$$= P(A).(P(\overline{B}) - P(C) + P(B).P(C)) = P(A).\big(P(\overline{B}) - P(C).(1 - P(B))\big) =$$
$$= P(A).(P(\overline{B}) - P(C) + P(B).P(C)) = P(A).\big(P(\overline{B}) - P(C).P(\overline{B})\big) =$$
$$= P(A).P(\overline{B}).(1 - P(C)) = P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C})$$

3) La familia $F_3 = \{\overline{A},\overline{B},\overline{C}\}$ es completamente independiente si:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$
b) $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{C})$
c) $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B}).P(\overline{C})$
d) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})$

La demostración de a), b) y c) es análoga al caso anterior.

Es: $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) =$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$

pues $F = \{A,B,C\}$ es completamente independiente

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A).P(B) + P(A).P(C) +$$
$$+ P(B).P(C) - P(A).P(B).P(C) =$$
$$= 1 - P(A) - P(B).(1 - P(A)) - P(C).(1 - P(A)) + P(B).P(C).(1 - P(A)) =$$
$$= (1 - P(A)).\big(1 - P(B) - P(C) + P(B).P(C)\big) =$$
$$= (1 - P(A)).\big(1 - P(B) - P(C).(1 - P(B)\big) =$$
$$= (1 - P(A)).(1 - P(B)).(1 - P(C)) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})$$

4) La familia $F_4 = \{A,B,\Omega\}$ es completamente independiente si:

a) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
b) $P(A \cap \Omega) = P(A).P(\Omega)$
c) $P(B \cap \Omega) = P(B).P(\Omega)$
d) $P(A \cap B \cap \Omega) = P(A).P(B).P(\Omega)$

El enunciado garantiza que se satisface a), y también se satisfacen b) y c). Es:

$$P(A \cap B \cap \Omega) = P\big((A \cap B) \cap \Omega\big) = P(A \cap B) =$$

$\boxed{(A \cap B) \cap \Omega = A \cap B}$ $\boxed{P(\Omega) = 1}$

$$= P(A).P(B) = P(A).P(B).P(\Omega)$$

FONEMATO 1.13.14

Durante la garantía una máquina presenta tres tipos de fallos A, B y C completamente independientes unos de otros y con probabilidades respectivas $0'1, 0'2$ y $0'3$. Calcúlese la probabilidad de la máquina falle durante la garantía.

SOLUCIÓN

Denotemos respectivamente A, B, C el suceso de que durante la garantía la máquina tenga el fallo A, B, C. El suceso F de que la máquina falle durante la garantía es $F = A \cup B \cup C$, siendo:

$$P(F) = P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \ldots$$

VENTANA

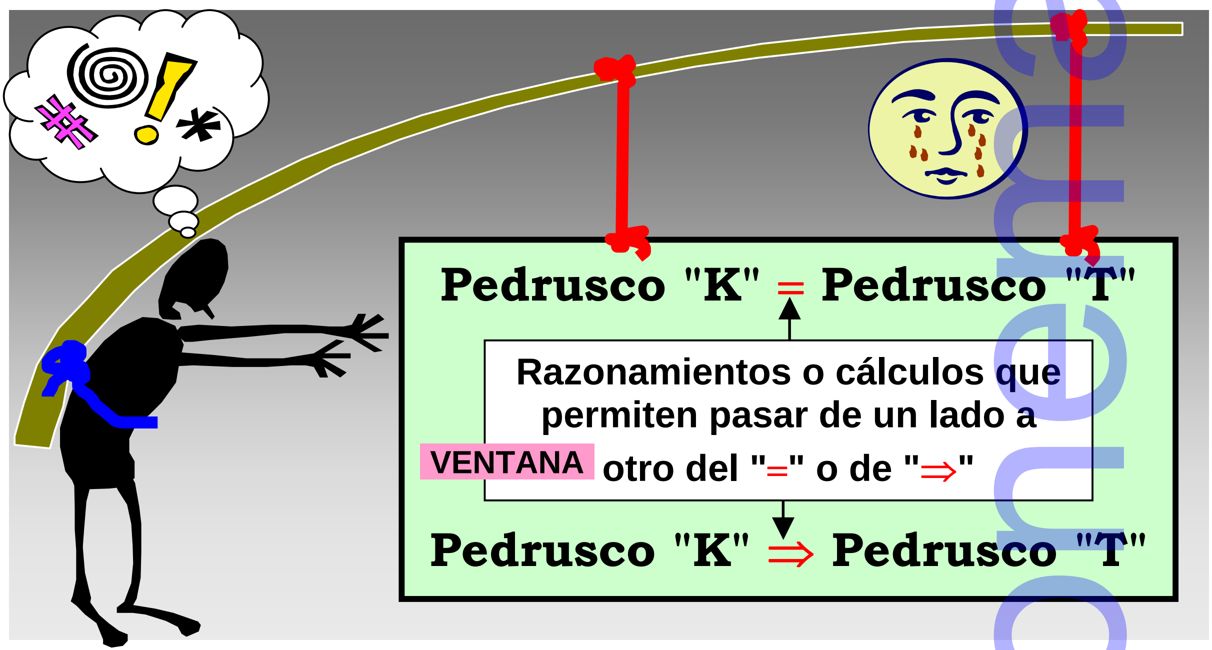
Es $P(A) = 0'1$, $P(B) = 0'2$ y $P(C) = 0'3$, y por ser completamente independiente la familia que forman los sucesos A, B y C, es:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \ ; \ P(A \cap C) = P(A).P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B).P(C) \ ; \ P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

También así: $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \ldots$

leyes de Morgan

familia $\{A,B,C\}$ completamente independiente $\Rightarrow \{\overline{A},\overline{B},\overline{C}\}$ también $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = (1 - 0'1).(1 - 0'2).(1 - 0'3)$



FONEMATO 1.13.15

¿Qué es más probable, obtener al menos un rey al lanzar 6 veces un dado u obtener al menos una pareja de reyes al lanzar 36 veces un par de dados?

SOLUCIÓN

Siendo A_k el suceso de obtener un rey en el k-ésimo lanzamiento ($k = 1,2,\dots,6$) del dado ($\Rightarrow P(A_k) = 1/6, \forall k \Rightarrow P(\overline{A}_k) = 1 - P(A_k) = 5/6, \forall k$) y A el suceso de obtener al menos un rey en seis lanzamientos, es:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_6) \underset{\uparrow}{=} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cong 0'665102$$

$$\boxed{\text{la familia } \{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_6\} \text{ es completamente independiente}}$$

Si B_j es obtener pareja de reyes en el j-ésimo lanzamiento ($j = 1,\dots,36$) del par de dados ($\Rightarrow P(B_j) = 1/36, \forall j \Rightarrow P(\overline{B}_j) = 1 - P(B_j) = 35/36, \forall j$) y B es obtener al menos una pareja de reyes en 36 lanzamientos, entonces:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \dots \cap \overline{B}_{36}) \underset{\uparrow}{=} 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{36} \cong 0'637289$$

$$\boxed{\text{la familia } \{\overline{B}_1, \overline{B}_2, \dots, \overline{B}_{36}\} \text{ es completamente independiente}}$$

FONEMATO 1.13.16

Sea $F=\{A,B,C,D\}$ una familia completamente independiente de sucesos. Calcúlese $P(A\cap B/C\cup\overline{D})$. ¿Son independientes los sucesos $A\cap B$ y $C\cup\overline{D}$?

SOLUCIÓN

$$P(A\cap B/C\cup\overline{D}) = \frac{P\big((A\cap B)\cap(C\cup\overline{D})\big)}{P(C\cup\overline{D})} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

$$= \frac{P\big((A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{D})\big)}{P(C\cup\overline{D})} =$$

$P(\text{Pepe}\cup\text{Juan}) = P(\text{Pepe}) + P(\text{Juan}) - P(\text{Pepe}\cap\text{Juan})$

$$= \frac{P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap\overline{D})-P(A\cap B\cap C\cap\overline{D})}{P(C\cup\overline{D})} =$$

$*\ P(A\cap B\cap C) = P(A).P(B).P(C)$
$*\ P(A\cap B\cap\overline{D}) = P(A).P(B).P(\overline{D})$
$*\ P(A\cap B\cap C\cap\overline{D}) = P(A).P(B).P(C).P(\overline{D})$

$$= \frac{P(A).P(B).P(C)+P(A).P(B).P(\overline{D})-P(A).P(B).P(C).P(\overline{D})}{P(C\cup\overline{D})} =$$

$$= P(A).P(B).\frac{P(C)+P(\overline{D})-P(C).P(\overline{D})}{P(C\cup\overline{D})} =$$

$F=\{A,B,C,D\}$ completamente independiente $\Rightarrow P(C).P(\overline{D}) = P(C\cap\overline{D})$

$$= P(A).P(B).\frac{P(C)+P(\overline{D})-P(C\cap\overline{D})}{P(C\cup\overline{D})} =$$

es $P(C)+P(\overline{D})-P(C\cap\overline{D}) = P(C\cup\overline{D})$

$$= P(A).P(B).\frac{P(C\cup\overline{D})}{P(C\cup\overline{D})} = P(A).P(B) = P(A\cap B)$$

pues $F=\{A,B,C,D\}$ es completamente independiente

Siendo

$$P(A\cap B/C\cup\overline{D}) = P\big((A\cap B)\cap(C\cup\overline{D})\big)/P(C\cup\overline{D}) = P(A\cap B)$$

es claro que

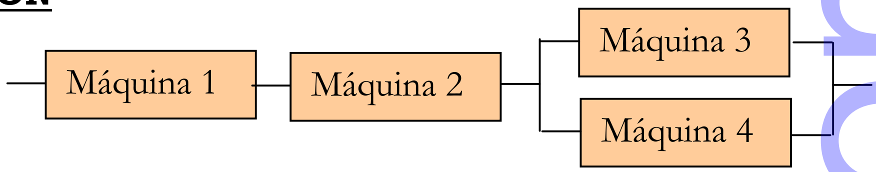
$$P\big((A\cap B)\cap(C\cup\overline{D})\big) = P(A\cap B).P(C\cup\overline{D})$$

o sea, los sucesos $A\cap B$ y $C\cup\overline{D}$ son independientes, es decir, el que ocurra uno no altera la probabilidad de que ocurra el otro.

FONEMATO 1.13.17

La cadena de montaje de una fábrica está formada por cuatro máquinas y el fallo en cualquiera de ellas es completamente independiente de las restantes. Las dos primeras están en serie, y la probabilidad de que una de ellas falle es 0'5. Las otras dos funcionan en paralelo (hacen el mismo trabajo) y en serie respecto a las dos primeras, y la probabilidad de que una de éstas falle es $2/3$. Calcúlese la probabilidad de que la cadena de montaje funcione correctamente.

SOLUCIÓN



Siendo A_k el suceso de que la k-ésima máquina $(k=1,2,3,4)$ funcione correctamente, el suceso F de que el sistema funcione correctamente es

$$F=(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\cup(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4)\cup(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4)$$

Por tanto:

$$P(F)=P\big((A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\cup(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4)\cup(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4)\big)=$$

$$=P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4)+P(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4)=$$

pues $(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$, $(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4)$ y $(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4)$ son mutuamente excluyentes, si ocurre uno no ocurren los demás

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\boxed{\frac{5}{36}}$$

VENTANA

Debido a la completa independencia de los sucesos A_1, A_2, A_3 y A_4, es:

$$* \ P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$* \ P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4)=P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(\overline{A}_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}$$

$$* \ P(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4)=P(A_1).P(A_2).P(\overline{A}_3).P(A_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso F converge en probabilidad a 5/36; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a 5/36 tanto como queramos.

FONEMATO 1.13.18

La probabilidad de que una máquina produzca una pieza defectuosa es 0'02, y el proceso de producción se detiene para el control preceptivo cuando se produce una pieza defectuosa. Calcúlese la probabilidad de que el proceso se detenga tras producir 5 piezas y la probabilidad de que se detenga antes de producir 51 piezas.

SOLUCIÓN

Siendo C_k el suceso de que la k-ésima pieza producida $(k = 1,2,3, \ldots)$ sea correcta, **el ejercicio no puede resolverse** si no se introduce la hipótesis de que la familia $F = \{C_1, C_2, \ldots\}$ es **completamente independiente.**

Denotemos T_i al suceso de que el proceso de producción se detenga tras producir la i-ésima pieza $(i = 1,2,3, \ldots)$.

- El proceso se detiene tras producir cinco piezas (ocurre el suceso T_5) si las cuatro primeras piezas fabricadas son correctas y la quinta es defectuosa; es decir, si ocurre el suceso $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap \overline{C}_5$:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap \overline{C}_5) = P(C_1).P(C_2).P(C_3).P(C_4).P(\overline{C}_5) =$$

pues $F = \{C_1, C_2, \ldots\}$ es completamente independiente

$$= (0'98)^2.0'02$$

$\forall$ k es $P(C_k) = 0'98$ y $P(\overline{C}_k) = 0'02$

- Ocurrirá el suceso W de que el proceso se detenga antes de producir 51 piezas si se detiene tras producir la primera pieza (ocurre T_1), o se detiene tras producir la segunda pieza (ocurre T_2) ..... o se detiene tras producir la quincuagésima pieza (ocurre T_{50}); así:

$$P(W) = P(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{50}) = P(T_1) + P(T_2) + \ldots + P(T_{50}) =$$

los sucesos $T_1, T_2, \ldots, T_{50}$ son incompatibles

VENTANA

$$* \; P(T_1) = P(\overline{C}_1) = 0'02$$
$$* \; P(T_2) = P(C_1 \cap \overline{C}_2) = 0'98.0'02$$
$$* \; P(T_3) = P(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) = 0'98^2.0'02$$
::
$$* \; P(T_{50}) = P(C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_{49} \cap \overline{C}_{50}) = 0'98^{49}.0'02$$

$$= 0'02.\left(1 + 0'98 + 0'98^2 + \ldots + 0'98^{49}\right) = 0'02.\frac{1 - 0'98^{49}.0'98}{1 - 0'98}$$

Los números $1, 0'98, 0'98^2 \ldots 0'98^{49}$ forman una **progresión geométrica** de razón 0'98, y la suma de un número finito de términos consecutivos de ella es

$$\frac{\text{Primer Término} - (\text{Último Término}).(\text{Razón})}{1 - (\text{Razón})}$$

FONEMATO 1.13.19

Tres jugadores A, B y C lanzan un dado de seis caras sucesivamente y en ese orden. Si gana el primero que obtenga un 4, calcúlese la probabilidad de ganar que tiene cada uno.

SOLUCIÓN

Siendo S_k el suceso de obtener un 4 en el k-ésimo $(k = 1,2,3, ...)$ lanzamiento del dado, es $P(S_k) = 1/6$ y $P(\overline{S}_k) = 5/6$. Evidentemente, el resultado de un lanzamiento no condiciona el de los restantes lanzamientos; por tanto, la familia $S_1, S_2, S_3, ...$ es completamente independiente.

Gana el primer jugador A si ocurre el suceso G_A:

$$G_A = S_1 \cup (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap S_4) \cup (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap \overline{S}_5 \cap \overline{S}_6 \cap S_7) \cup .....$$

Siendo incompatibles o mutuamente excluyentes los sucesos cuya unión es G_A, se tiene que:

$$P(G_A) = P(S_1) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap S_4) +$$
$$+P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap \overline{S}_5 \cap \overline{S}_6 \cap S_7) + ... =$$
$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^9 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{12} . \frac{1}{6} + ... = \frac{1/6}{1 - (5/6)^3} = \frac{36}{91}$$

La suma de los infinitos términos de una **progresión geométrica** de "razón" menor que 1 en valor absoluto es

$$\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}}$$

VENTANA

Gana el segundo jugador B si ocurre el suceso G_B:

$$G_B = (\overline{S}_1 \cap S_2) \cup (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap S_5) \cup .....$$

Siendo incompatibles los sucesos cuya unión es G_B, se tiene que:

$$P(G_B) = P(\overline{S}_1 \cap S_2) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap S_5) + ... =$$
$$= \frac{5}{6} . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{10} . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{13} . \frac{1}{6} + ... = \frac{\frac{5}{6} . \frac{1}{6}}{1 - (5/6)^3} = \frac{30}{91}$$

Gana el tercer jugador C si ocurre el suceso G_C:

$$G_C = (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_3) \cup (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap \overline{S}_5 \cap S_6) \cup .....$$

Siendo incompatibles los sucesos cuya unión es G_C, se tiene que:

$$P(G_C) = P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap S_3) + P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \overline{S}_3 \cap \overline{S}_4 \cap \overline{S}_5 \cap S_6) + ... =$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 . \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11} . \frac{1}{6} + ... = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 . \frac{1}{6}}{1 - (5/6)^3} = \frac{25}{91}$$

FONEMATO 1.13.20

Siendo A, B y C tres sucesos definidos sobre el mismo espacio probabilístico y tales que $P(B)$ y $P(C)$ son mayores que cero, demuéstrese que si B y C son independientes sucede que $P(A / B) = P(A / (B \cap C)).P(C) + P(A / (B \cap \overline{C})).P(\overline{C})$.

SOLUCIÓN

$$P(A / (B \cap C)).P(C) + P(A / (B \cap \overline{C})).P(\overline{C}) =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}.P(C) + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B \cap \overline{C})}.P(\overline{C}) =$$

Según la definición de probabilidad condicionada, es:

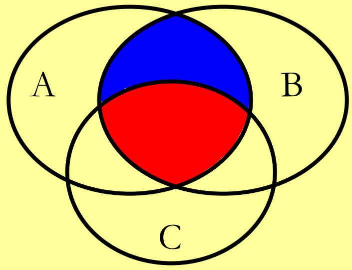
$$P(A / (B \cap C)) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \; ; \; P(A / (B \cap \overline{C})) = \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B \cap \overline{C})}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B).P(C)}.P(C) + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B).P(\overline{C})}.P(\overline{C}) =$$

$$\text{B y C independientes} \Rightarrow \begin{cases} P(B \cap C) = P(B).P(C) \\ \text{B y } \overline{C} \text{ independientes} \Rightarrow P(B \cap \overline{C}) = P(B).P(\overline{C}) \end{cases}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)} =$$

VENTANA

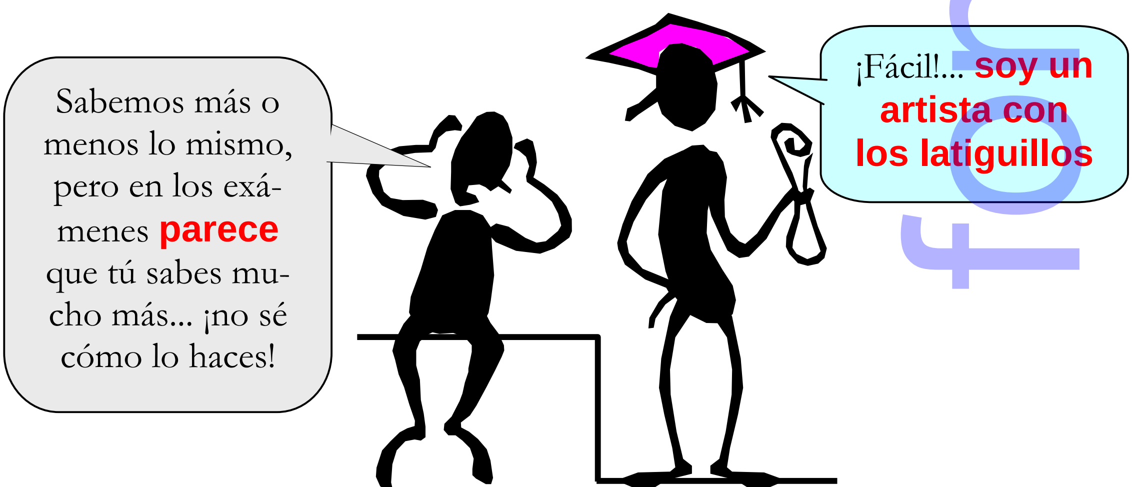


Como los sucesos $A \cap B \cap C$ (zona roja) y $A \cap B \cap \overline{C}$ (zona azul) son mutuamente excluyentes o disjuntos, la suma de sus respectivas probabilidades es la probabilidad de la unión de ambos sucesos.

pues $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B$

$$= \frac{P\big((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})\big)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A / B)$$

Según la definición de probabilidad condicionada



1.14 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea "E" un experimento aleatorio y Ω la tarta de una unidad de masa de probabilidad que va pegada a la chepa del experimento, es decir, Ω es el espacio muestral de "E".

Consideremos que los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (todos con probabilidad no nula) son incompatibles dos a dos y que su unión es Ω:

$$S_i \cap S_j = \varnothing, \text{ si } i \neq j \;\; ; \;\; S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = \Omega$$

Si "A" es un suceso correspondiente a "E", el **teorema de la probabilidad total** establece que

$$P(A) = P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)$$

En efecto:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)\big) =$$

$\boxed{\Omega = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n}$

la intersección es distributiva respecto de la unión

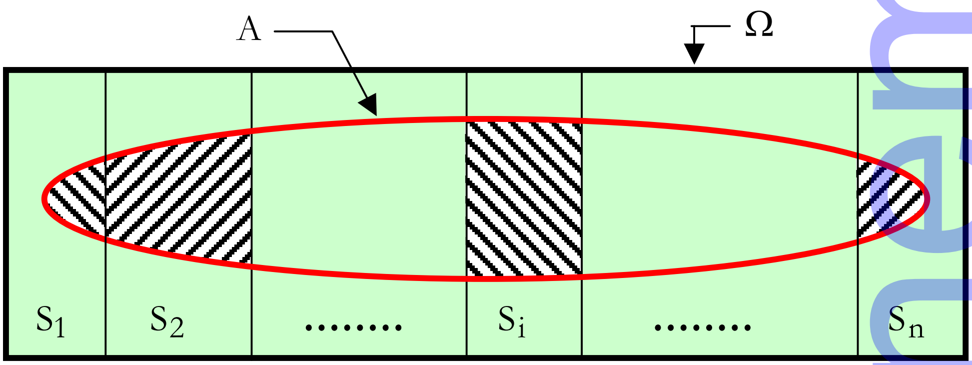
$$= P\big((A \cap S_1) \cup (A \cap S_2) \cup \ldots \cup (A \cap S_n)\big) =$$

$$= P(A \cap S_1) + P(A \cap S_2) + \ldots + P(A \cap S_n) =$$

pues si $i \neq j$ los sucesos $(A \cap S_i)$ y $(A \cap S_j)$ son incompatibles:
$(A \cap S_i) \cap (A \cap S_j) = A \cap (S_i \cap S_j) = A \cap \varnothing = \varnothing$

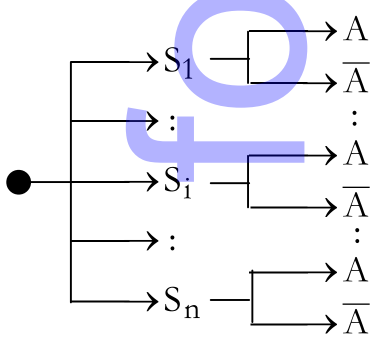
$$= P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)$$

según la regla de la multiplicación: $P(A \cap S_i) = P(S_i).P(A/S_i)$



$$A = (A \cap S_1) \cup (A \cap S_2) \cup \ldots \cup (A \cap S_n)$$

Usaremos este teorema para calcular probabilidades de sucesos relacionados con **experimentos por etapas.** En el esquema adjunto se presenta un experimento de dos etapas: en la 1ª etapa por fuerza ocurre uno de los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ y en la 2ª etapa ocurre "A" o no.



FONEMATO 1.14.1

Una empresa emplea dos métodos alternativos A y B para fabricar un artículo. El 20 % de la producción se hace por el método A y el resto por el B.

Cuando a un cliente se le ofrece el artículo, la probabilidad de que lo compre es 0'7 si se fabricó por el sistema A, y 0'9 si se fabricó por el B. Calcúlese la probabilidad de que un cliente compre el artículo.

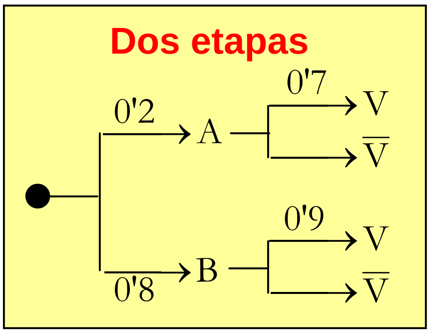
SOLUCIÓN

Siendo A el suceso de que el artículo sea fabricado por el método A, y B el suceso de que sea fabricado por el método B, es:

$$P(A)=0'2\ ;\ P(B)=0'8$$

Siendo V el suceso de que el artículo se venda al ofrecerlo a un cliente; es:

$$P(V/A)=0'7\ ;\ P(V/B)=0'9$$



Para este experimento de dos etapas o fases, según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(V)=P(A).P(V/A)+P(B).P(V/B)=0'2.0'7+0'8.0'9=\boxed{0'86}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso V converge en probabilidad a $0'86$; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $0'86$ tanto como queramos.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Siendo "E" un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, si los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (todos con probabilidad no nula) son incompatibles dos a dos y su unión es Ω, entonces, siendo "A" un suceso correspondiente a "E", es:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(S_k).P(A/S_k)=$$

$$=P(S_1).P(A/S_1)+P(S_2).P(A/S_2)+\ldots+P(S_n).P(A/S_n)$$

FONEMATO 1.14.2

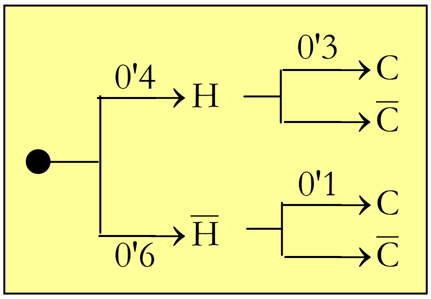
En un grupo formado por 40 hombres y 60 mujeres ocurre que el 30 % de los hombres y el 10 % de las mujeres tienen caspa.

Determínese la probabilidad de que una persona del grupo elegida al azar tenga caspa.

SOLUCIÓN

Siendo H el suceso de que la persona elegida sea hombre, es $P(H) = 0'4$ y $P(\overline{H}) = 0'6$. Siendo C el suceso de que una persona del grupo tenga caspa, nos dicen que

$$P(C/H) = 0'3 \ ; \ P(C/\overline{H}) = 0'1$$



Para nuestro experimento de dos etapas o fases, según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(C) = P(H).P(C/H) + P(\overline{H}).P(C/\overline{H}) = 0'4.0'3 + 0'6.0'1 = 0'18$$

FONEMATO 1.14.3

Disponemos de 10 urnas, de las cuales:

* Dos urnas son del tipo 1, cada una con 2 bolas amarillas y 3 negras
* Una urna es del tipo 2, con 4 bolas amarillas y 2 negras
* Cuatro urnas son del tipo 3, cada una con 1 bola amarilla y 3 negras
* Tres urnas son del tipo 4, cada una con 5 bolas amarillas

1) Calcúlese la probabilidad de obtener bola amarilla si se elige al azar una urna y de ella se extrae una bola al azar.
2) Se lanza un dado y según que el resultado sea menor que 3 o no, se elige al azar una urna entre las de tipo par o entre las de tipo impar; después se extrae al azar una bola. Calcúlese la probabilidad de que sea negra.

SOLUCIÓN

1) Siendo U_i el suceso de elegir una urna del i-ésimo tipo, es:

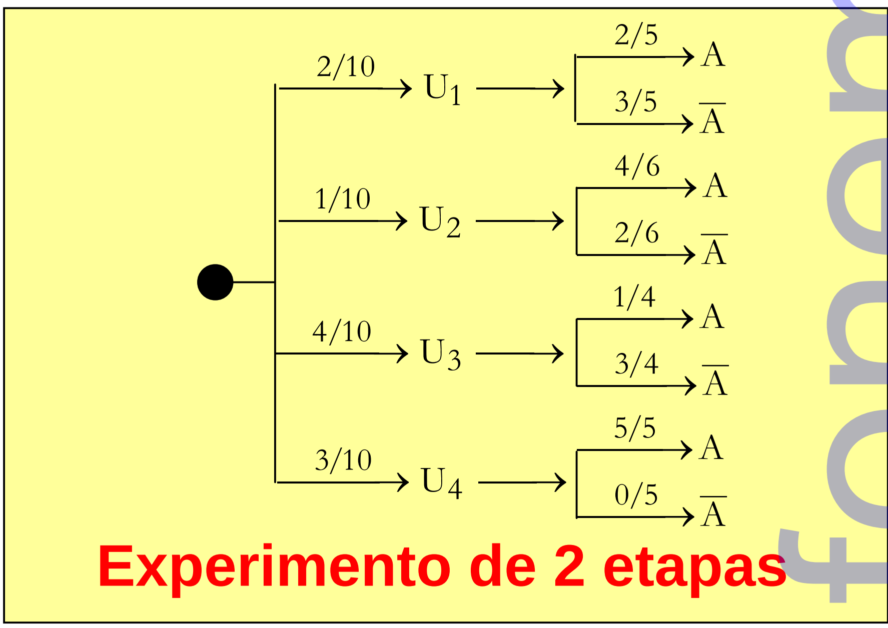
$$P(U_1)=\frac{2}{10}\ ;\ P(U_2)=\frac{1}{10}\ ;\ P(U_3)=\frac{4}{10}\ ;\ P(U_4)=\frac{3}{10}$$

Siendo A el suceso de extraer una bola amarilla, es:

$$P(A/U_1)=\frac{2}{5}\ ;\ P(A/U_2)=\frac{4}{6}\ ;\ P(A/U_3)=\frac{1}{4}\ ;\ P(A/U_4)=\frac{5}{5}$$

Para este experimento de dos etapas o fases, según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(U_1).(A/U_1)+P(U_2).P(A/U_2)+ \\ &+P(U_3).P(A/U_3)+P(U_4).P(A/U_4)= \\ &=\frac{2}{10}.\frac{2}{5}+\frac{1}{10}.\frac{4}{6}+\frac{4}{10}.\frac{1}{4}+\frac{3}{10}.\frac{5}{5} \end{aligned}$$



Experimento de 2 etapas

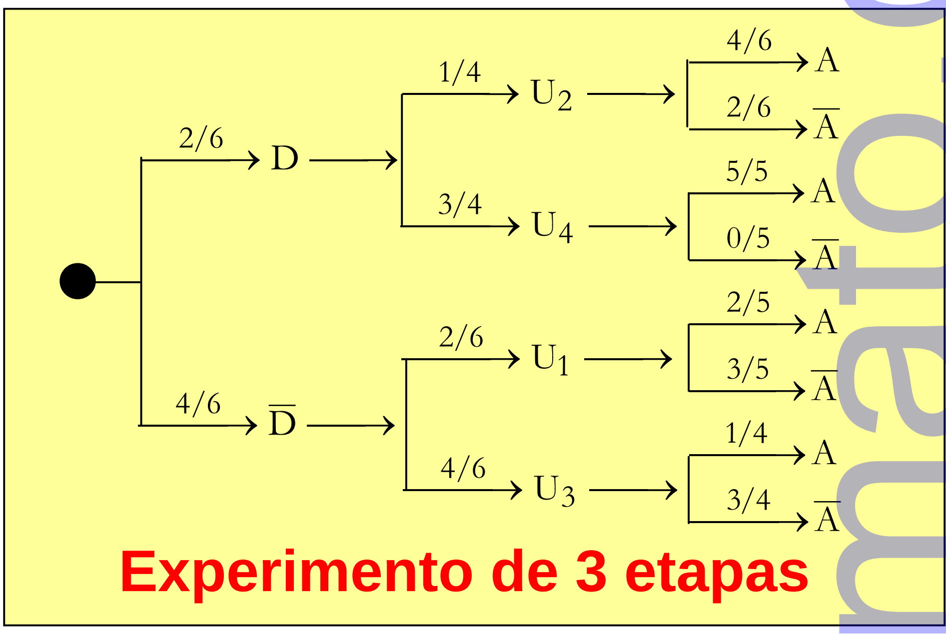
2) Siendo D el suceso de obtener un número menor que 3 al lanzar el dado, es claro que $P(D) = 2/6$ y $P(\overline{D}) = 4/6$.

Si ocurre D se elige una urna entre las cuatro urnas de tipo par (una urna tipo 2 y tres urnas tipo 4), por tanto: $P(U_2/D) = 1/4$ y $P(U_4/D) = 3/4$.

Si ocurre $\overline{D}$ se elige una urna entre las seis urnas de tipo impar (dos urnas tipo 1 y cuatro urnas tipo 3), por tanto: $P(U_1/\overline{D}) = 2/6$ y $P(U_3/\overline{D}) = 4/6$.

Para este experimento de tres etapas o fases, según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(\overline{A}) = P(D).P(U_2/D).P(\overline{A}/D \cap U_2) + P(D).P(U_4/D).P(\overline{A}/D \cap U_4) +$$
$$+P(\overline{D}).P(U_1/\overline{D}).P(\overline{A}/\overline{D} \cap U_1) + P(\overline{D}).P(U_3/\overline{D}).P(\overline{A}/\overline{D} \cap U_3) =$$
$$= \frac{2}{6}.\frac{1}{4}.\frac{2}{6} + \frac{2}{6}.\frac{3}{4}.\frac{0}{5} + \frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{3}{5} + \frac{4}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{4}$$



TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Siendo "E" un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, si los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (todos con probabilidad no nula) son incompatibles dos a dos y su unión es Ω, entonces, siendo "A" un suceso correspondiente a "E", es:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k).P(A/S_k) =$$
$$= P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)$$

FONEMATO 1.14.4

Tres máquinas fabrican piezas similares. Las respectivas producciones diarias de cada máquina son 300, 450 y 600 piezas, y los respectivos porcentajes de piezas defectuosas son 2 %, 3 % y 4 %.

Si al final del día se elige una pieza al azar, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

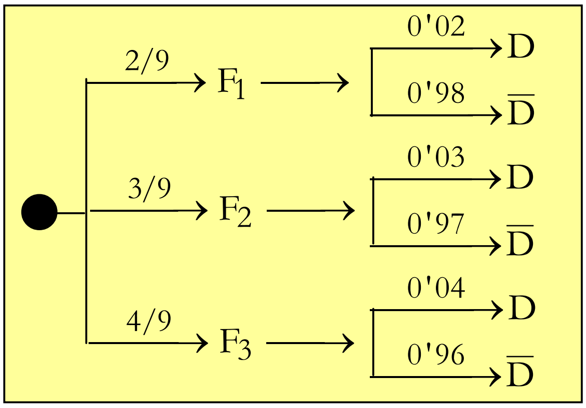
SOLUCIÓN

Siendo F_k el suceso de que la pieza se haya fabricado en la k-ésima máquina $(k = 1,2,3)$, es:

$$P(F_1) = \frac{300}{300+450+600} = \frac{2}{9} \; ; \; P(F_2) = \frac{450}{300+450+600} = \frac{3}{9}$$
$$P(F_3) = \frac{600}{300+450+600} = \frac{4}{9}$$

Siendo D el suceso de que la pieza sea defectuosa, nos dicen que

$$P(D/F_1) = 0'02 \; ; \; P(D/F_2) = 0'03 \; ; \; P(D/F_3) = 0'04$$



Para nuestro experimento de dos etapas o fases, según **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(D) = P(F_1).P(D/F_1) + P(F_2).P(D/F_2) + P(F_3).P(D/F_3) =$$
$$= \frac{2}{9}.0'02 + \frac{3}{9}.0'03 + \frac{4}{9}.0'04$$

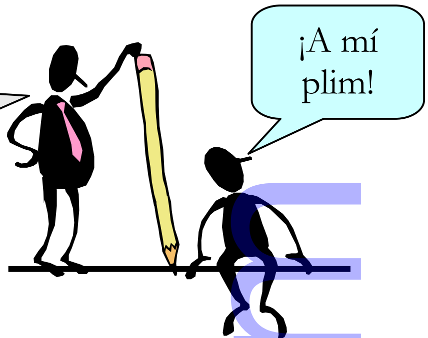
TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Siendo "E" un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, si los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (todos con probabilidad no nula) son incompatibles dos a dos y su unión es Ω, entonces, siendo "A" un suceso correspondiente a "E", es:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k).P(A/S_k) =$$
$$= P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)$$

1.15 TEOREMA DE BAYES

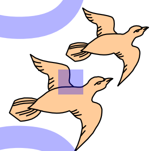
Se mira el resultado de un experimento aleatorio y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas.



Sea "E" un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral. Si los sucesos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (todos con probabilidad no nula) son incompatibles dos a dos y su unión es Ω (o sea, $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = \Omega$ y $S_i \cap S_j = \varnothing$, si $i \neq j$), siendo "A" el suceso que ha ocurrido al realizar el experimento, es:

$$P(S_i/A) = \frac{\text{masa de } (S_i \cap A)}{\text{masa de } A} = \frac{P(S_i \cap A)}{P(A)} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

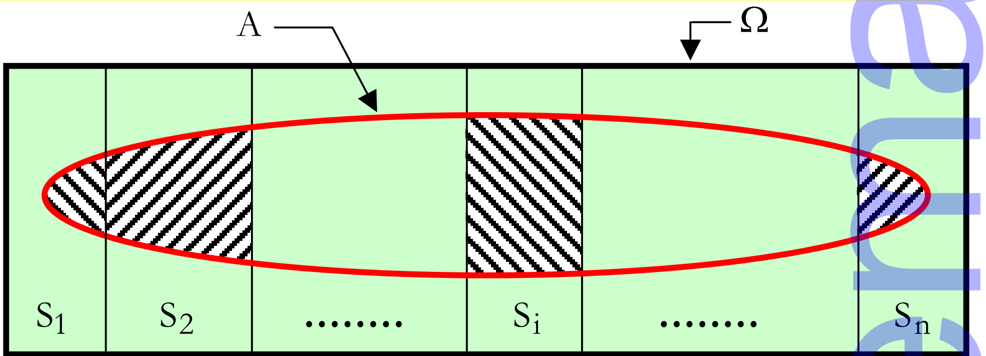


$$= \frac{P(S_i).P(A/S_i)}{P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)}$$

$*$ Regla de la multiplicación: $P(S_i \cap A) = P(S_i).P(A/S_i)$

$*$ Según el teorema de la probabilidad total, es:

$P(A) = P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + \ldots + P(S_n).P(A/S_n)$

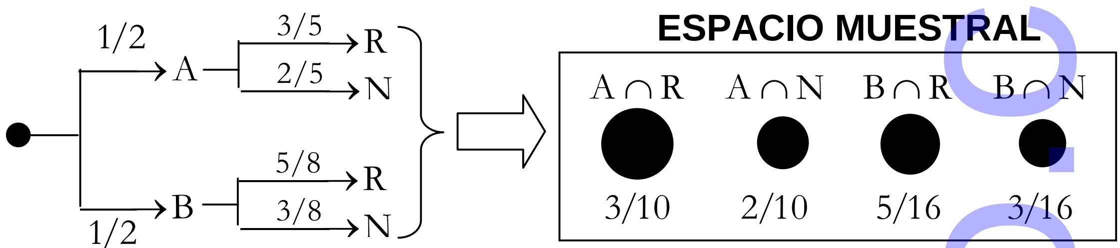


FONEMATO 1.15.1

La urna A contiene 2 bolas negras y 3 rojas, y la urna B contiene 3 bolas negras y 5 rojas. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola al azar. Calcúlese la probabilidad de que la bola extraía sea roja. Si la bola extraída es negra, calcúlese la probabilidad de que proceda de la urna A.

SOLUCIÓN

Estamos ante un **experimento por etapas:** primero se elige urna y luego se extrae una bola de la urna elegida. Siendo A el suceso de elegir la urna A y B el suceso de elegir la urna B, como la urna se elige al azar, es $P(A) = P(B) = 1/2$. Siendo N el suceso de elegir bola negra y R el de elegir bola roja, como la urna A contiene 2 bolas negras y 3 rojas, es $P(N/A) = 2/5$ y $P(R/A) = 3/5$; y como la urna B contiene 3 bolas negras y 5 rojas, es $P(N/B) = 3/8$ y $P(R/B) = 5/8$.



- Según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(R) = P(A).P(R/A) + P(B).P(R/B) = (1/2).(3/5) + (1/2).(5/8)$$

- **Se mira el resultado de un experimento aleatorio** (la bola extraída es negra) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se nos pide la probabilidad de que la bola proceda de la urna A). Según el **teorema de Bayes,** es:

$$P(A/N) = \frac{\text{masa de } (A \cap N)}{\text{masa de } N} = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

$$= \frac{P(A).P(N/A)}{P(A).P(N/A) + P(B).P(N/B)} = \frac{(1/2).(2/5)}{(1/2).(2/5) + (1/2).(3/8)}$$

∗ Según la regla de la multiplicación: $P(A \cap N) = P(A).P(N/A)$
∗ Según el teorema de la probabilidad total, es:
$P(N) = P(A).P(N/A) + P(B).P(N/B)$

VENTANA

En examen no debes "soltar" la fórmula de Bayes

$$P(A/N) = \frac{P(A).P(N/A)}{P(A).P(N/A) + P(B).P(N/B)}$$

como si fuese un **escupitajo;** es decir, debes **deducirla,** haciendo referencia a la **definición de probabilidad condicionada**, a la **regla de la multiplicación** y **al teorema de la probabilidad total**, como acabas de ver en cinemascope.

FONEMATO 1.15.2

Se lanza al aire una moneda elegida al azar de una urna que contiene 8 monedas correctas y 2 monedas defectuosas cuya probabilidad de cara es 0'7.

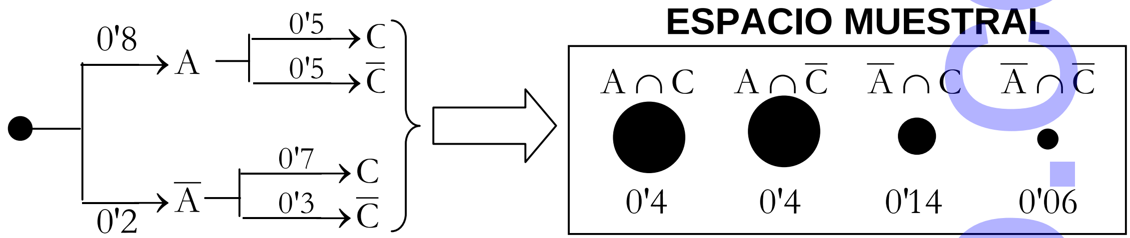
1) Calcúlese la probabilidad de obtener "cruz".
2) Si se ha obtenido "cara", calcúlese la probabilidad de que la moneda lanzada sea defectuosa.

SOLUCIÓN

Experimento por etapas: se elige moneda y luego se lanza al aire. Siendo A el suceso de elegir una moneda correcta, es $P(A)=8/10$ y $P(\overline{A})=2/10$. Sien-do C el suceso obtener "cara" al lanzar la moneda, es:

$$P(C/A)=0'5\ ;\ P(\overline{C}/A)=0'5\ ;\ P(C/\overline{A})=0'7\ ;\ P(\overline{C}/\overline{A})=0'3$$

ESPACIO MUESTRAL



1) Según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(\overline{C})=P(A).P(\overline{C}/A)+P(\overline{A}).P(\overline{C}/\overline{A})=0'8.0'5+0'2.0'3=0'46$$

2) **Se mira el resultado de un experimento aleatorio** (se ha obtenido "cara" al lanzar la moneda) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se nos pide la probabilidad de haber lanzado una moneda defectuosa).

Según el **teorema de Bayes** (versión cinemascope), es:

$$P(\overline{A}/C)=\frac{\text{masa de }(\overline{A}\cap C)}{\text{masa de }C}=\frac{P(\overline{A}\cap C)}{P(C)}=$$

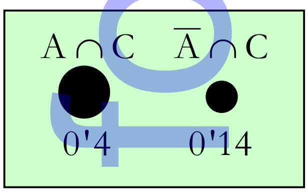
según la definición de probabilidad condicionada

$$=\frac{P(\overline{A}).P(C/\overline{A})}{P(A).P(C/A)+P(\overline{A}).P(C/\overline{A})}=\frac{0'2.0'7}{0'8.0'5+0'2.0'7}$$

VENTANA

* Regla de la multiplicación: $P(\overline{A}\cap C)=P(\overline{A}).P(C/\overline{A})$
* Según el teorema de la probabilidad total, es: $P(C)=P(A).P(C/A)+P(\overline{A}).P(C/\overline{A})$

- **Remate torero:** si se ha obtenido "cara", **el espacio muestral se reduce** al de la figura, y la probabilidad de que la moneda sea defectuosa es la **proporción** entre el número $0'14$, que expresa la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap C$ y el número $0'4+0'14$, que expresa la masa total de probabilidad en el **nuevo espacio muestral.**



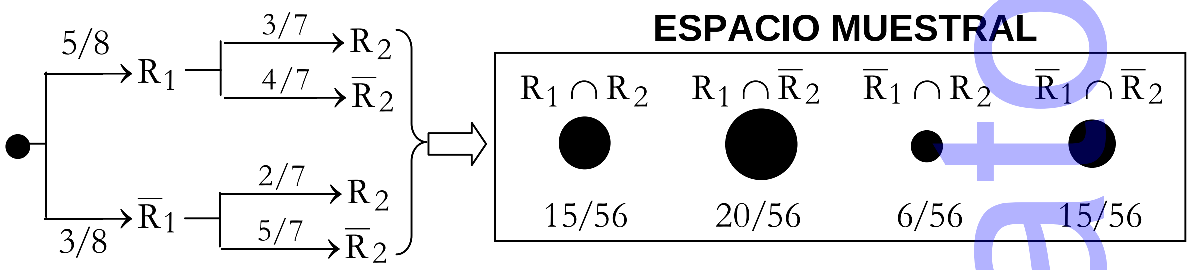
FONEMATO 1.15.3

La urna A contiene 3 bolas negras y 5 rojas, y la urna B contiene 4 bolas negras y 2 rojas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en la urna B, a continuación se extrae al azar una bola de B.

1) Calcúlese la probabilidad de que la bola extraída de B sea roja.
2) Si la bola extraída de B es roja, calcúlese la probabilidad de que la bola extraída de A haya sido negra.

SOLUCIÓN

Estamos ante un **experimento por etapas:** primero se traslada una bola de A a B y luego se extrae bola de B. Siendo R_1 el suceso de que la bola trasladada de A a B sea roja y R_2 el suceso de que la bola extraída de B sea roja, como A contiene 3 negras y 5 rojas, es $P(R_1) = 5/8$ y $P(\overline{R}_1) = 3/8$. Si la bola que pasa de A a B es roja, en la segunda etapa la urna B contiene 4 bolas negras y 3 rojas; así, es $P(R_2/R_1) = 3/7$ y $P(\overline{R}_2/R_1) = 4/7$. Si la bola que pasa de A a B es negra, en la segunda etapa la urna B contiene contiene 5 negras y 2 rojas; por tanto, es $P(R_2/\overline{R}_1) = 2/7$ y $P(\overline{R}_2/\overline{R}_1) = 5/7$.



1) Según el **teorema de la probabilidad total,** es:

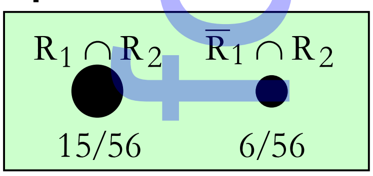
$$P(R_2) = P(R_1).P(R_2/R_1) + P(\overline{R}_1).P(R_2/\overline{R}_1) = \frac{5}{8}.\frac{3}{7} + \frac{3}{8}.\frac{2}{7} = \frac{21}{56}$$

2) **Se mira el resultado de un experimento aleatorio** (la bola extraída de B es roja) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (piden la probabilidad de que la bola trasladada de A a B haya sido negra). Según el **teorema de Bayes** (versión escupitajo), es:

$$P(\overline{R}_1/R_2) = \frac{\text{masa de } (\overline{R}_1 \cap R_2)}{\text{masa de } R_2} = \frac{P(\overline{R}_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{6/56}{21/56} = \frac{2}{7}$$

según la definición de probabilidad condicionada

- **Remate torero:** si la bola extraída es roja, **el espacio muestral se reduce** al de la figura, y la probabilidad de que la bola trasladada de A a B haya sido negra es la **proporción** entre $6/56$ que expresa la probabilidad del suceso $\overline{R}_1 \cap R_2$ y el número $(15/56) + (6/56)$, que expresa la masa total en el **nuevo espacio muestral.**

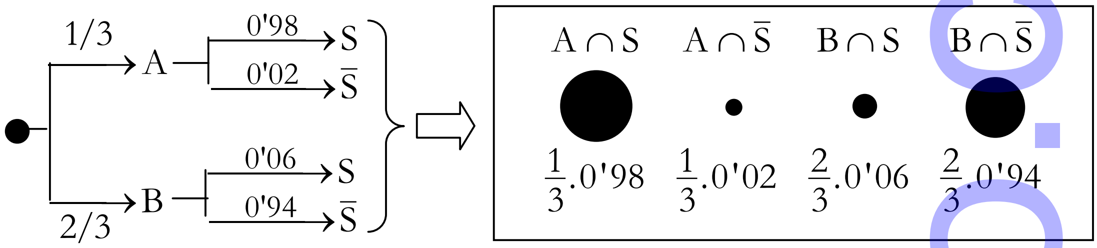


FONEMATO 1.15.4

Por los síntomas de un enfermo se deduce que padece la enfermedad A con probabilidad $1/3$ o la enfermedad B con probabilidad $2/3$. Para precisar el diagnóstico se somete al enfermo a un análisis cuyos resultados posibles son positivo o negativo. Se sabe que en pacientes con la enfermedad A el análisis es positivo con probabilidad $0'98$, y en los que padecen la enfermedad B es positivo con probabilidad $0'06$. Si el resultado del análisis es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el enfermo padezca la enfermedad A? ¿Y la B?

SOLUCIÓN

Sea A el suceso de que el enfermo padeza enfermedad A, y B el suceso de que padezca la B; es $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 2/3$. Siendo S el suceso de que el análisis sea positivo, es $P(S/A) = 0'98$, $P(S/B) = 0'06$, $P(\bar{S}/A) = 0'02$ y $P(\bar{S}/B) = 0'94$.



Se mira el resultado de un experimento aleatorio (el análisis es positivo) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (piden la probabilidad de que el enfermo padezca una enfermedad concreta de las dos que puede padecer). Según el **teorema de Bayes** (cinemascope), es:

$$P(A/S) = \frac{\text{masa de } (A \cap S)}{\text{masa de } S} = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

$$= \frac{P(A).P(S/A)}{P(A).P(S/A) + P(B).P(S/B)} = \frac{\frac{1}{3}.0'98}{\frac{1}{3}.0'98 + \frac{2}{3}.0'06}$$

VENTANA

* Regla de la multiplicación: $P(A \cap S) = P(A).P(S/A)$
* Según el teorema de la probabilidad total, es:
$P(S) = P(A).P(S/A) + P(B).P(S/B)$

Análogamente:

$$P(B/S) = \frac{P(B).P(S/B)}{P(A).P(S/A) + P(B).P(S/B)} = \frac{\frac{2}{3}.0'06}{\frac{1}{3}.0'98 + \frac{2}{3}.0'06} = \boxed{\frac{6}{55}}$$

Latiguillo de remate: la frecuencia relativa del suceso B/S converge en probabilidad a $6/55$; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a $6/55$ tanto como queramos.

FONEMATO 1.15.5

Un fabricante de coches desea lanzar un modelo al mercado el próximo año y al estudiar la posible situación económica que habrá entonces contempla tres alternativas equiprobales: existencia de inflación, estabilidad o depresión. La probabilidad de que se lance el coche al mercado es 0'7 si hay inflación, 0'4 si hay estabilidad y 0'1 si hay depresión.

1) Calcúlese la probabilidad de que el coche se lance al mercado.
2) Si se lanza al mercado, determínese la probabilidad de que exista inflación.

SOLUCIÓN

Estamos ante un **experimento por etapas:** siendo L el suceso de que el coche se lance al mercado, I el suceso de que haya inflación, E el suceso de que haya estabilidad y D el suceso de que haya depresión, se nos dice que:

$$P(I) = P(E) = P(D) = 1/3$$
$$P(L/I) = 0'7 \ ; \ P(L/E) = 0'4 \ ; \ P(L/D) = 0'1$$

$$\begin{array}{lll}
\xrightarrow{1/3} I \longrightarrow & \xrightarrow{0'7} L \Rightarrow P(I \cap L) = 0'7/3 \\
& \xrightarrow{0'3} \overline{L} \Rightarrow P(I \cap \overline{L}) = 0'3/3 \\
\bullet \xrightarrow{1/3} E \longrightarrow & \xrightarrow{0'4} L \Rightarrow P(E \cap L) = 0'4/3 \\
& \xrightarrow{0'6} \overline{L} \Rightarrow P(E \cap \overline{L}) = 0'6/3 \\
\xrightarrow{1/3} D \longrightarrow & \xrightarrow{0'1} L \Rightarrow P(D \cap L) = 0'1/3 \\
& \xrightarrow{0'9} \overline{L} \Rightarrow P(D \cap \overline{L}) = 0'9/3
\end{array}$$

1) Según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(L) = P(I).P(L/I) + P(E).P(L/E) + P(D).P(L/D) = \frac{1}{3}.(0'7+0'4+0'1) = 0'4$$

2) **Se mira el resultado de un experimento aleatorio** (el coche se lanza al mercado) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (piden la probabilidad de que haya inflación). Según el **teorema de Bayes** (versión escupitajo), es:

$$P(I/L) = \frac{P(I).P(L/I)}{P(L)} = \frac{0'7/3}{0'4} = \frac{7}{12}$$

- **Remate torero:** si el coche se lanza al mercado, **el espacio muestral se reduce** a los sucesos $I \cap L, E \cap L$ y $D \cap L$ ... y la probabilidad de que haya inflación es la **proporción** entre el número $0'7/3$ que expresa la probabilidad del suceso $I \cap L$ y el número 0'4, que expresa la masa total de probabilidad en el **nuevo espacio muestral.**

FONEMATO 1.15.6

Disponemos de 50 urnas de tres tipos; en cada urna tipo A hay 4 bolas rojas y 2 negras, en cada cada urna tipo B hay 2 bolas rojas y 4 negras, en cada urna tipo C hay 3 bolas rojas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola al azar. Determínese el número de urnas que hay de cada tipo sabiendo que si la bola extraída es roja entonces es $2/7$ la probabilidad de que proceda de una urna tipo A, y si es negra entonces es $1/2$ la probabilidad de que proceda de una urna tipo B.

SOLUCIÓN

Siendo "a", "b" y "c" el respectivo número de urnas tipo A, B y C, se nos dice que $a+b+c=50$.

Sea respectivamente A, B, C el suceso de elegir una urna del tipo A, B, C:

$$P(A)=a/50\ ;\ P(B)=b/50\ ;\ P(C)=c/50$$

Siendo R el suceso de extraer bola roja, dada la composición de cada tipo de urna, es:

$$P(R/A)=4/6\ ;\ P(R/B)=2/6\ ;\ P(R/C)=3/6$$
$$P(\overline{R}/A)=2/6\ ;\ P(\overline{R}/B)=4/6\ ;\ P(\overline{R}/C)=3/6$$

$$\begin{array}{lll}
\xrightarrow{a/50} A & \xrightarrow{4/6} R & \Rightarrow P(A\cap R)=4.a/300 \\
 & \xrightarrow{2/6} \overline{R} & \Rightarrow P(A\cap \overline{R})=2.a/300 \\
\bullet \xrightarrow{b/50} B & \xrightarrow{4/6} R & \Rightarrow P(B\cap R)=2.b/300 \\
 & \xrightarrow{2/6} \overline{R} & \Rightarrow P(B\cap \overline{R})=4.b/300 \\
\xrightarrow{c/50} C & \xrightarrow{3/6} R & \Rightarrow P(C\cap R)=3.c/300 \\
 & \xrightarrow{3/6} \overline{R} & \Rightarrow P(C\cap \overline{R})=3.c/300
\end{array}$$

Si la bola extraída es roja (es decir, ocurre el suceso R) el espacio muestral queda reducido al de la figura adjunta, y nos dicen que en tal situación es:

$$P(A/R)=\frac{\frac{4.a}{300}}{\frac{4.a}{300}+\frac{2.b}{300}+\frac{3.c}{300}}=\frac{2}{7}\quad (I)$$

$A\cap R$	$B\cap R$	$C\cap R$
●	●	●
$4.a/300$	$2.b/300$	$3.c/300$

Si la bola extraída es negra (es decir, ocurre el suceso $\overline{R}$) el espacio muestral queda reducido al de la figura adjunta, y nos dicen que en tal situación es:

$$P(B/\overline{R})=\frac{\frac{4.b}{300}}{\frac{2.a}{300}+\frac{4.b}{300}+\frac{3.c}{300}}=\frac{1}{2}\quad (II)$$

$A\cap \overline{R}$	$B\cap \overline{R}$	$C\cap \overline{R}$
●	●	●
$2.a/300$	$4.b/300$	$3.c/300$

Las ecuaciones (I) y (II) junto a la $a+b+c=50$ forman un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas, y puedes comprobar que su única solución es $a=10$, $b=c=20$.

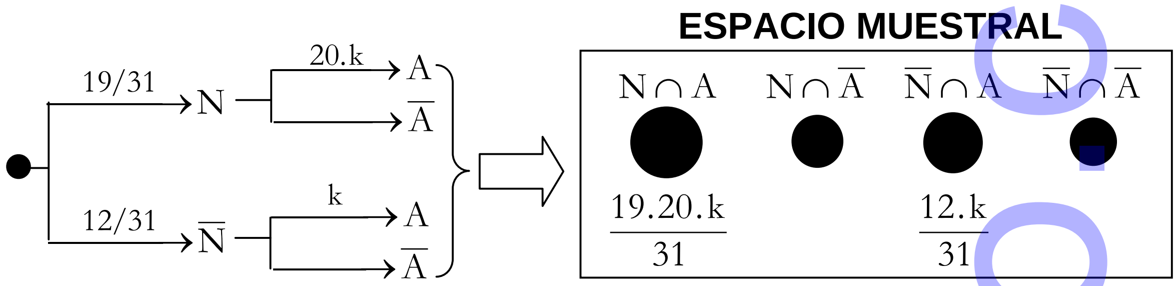
FONEMATO 1.15.7

En enero se ha producido un accidente al aterrizar un avión en un aeropuerto. Se sabe que en enero ha habido 19 días con niebla y que en estas circunstancias la probabilidad de accidente es 20 veces mayor que la probabilidad de accidente un día sin niebla. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente se haya producido un día con niebla?

SOLUCIÓN

Siendo N el suceso de que un día de enero haya niebla, como enero tiene 31 días y hay niebla en 19 de ellos, es $P(N) = 19/31$ y $P(\overline{N}) = 12/31$.

Siendo A el suceso de que un día de enero haya accidente, si $P(A/\overline{N}) = k$, nos dicen que $P(A/N) = 20.k$.



Se mira el resultado de un experimento aleatorio (ha habido accidente) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se nos pide la probabilidad de que el día del accidente hubiera niebla).

Según el **teorema de Bayes** (versión cinemascope), es:

$$P(N/A) = \frac{\text{masa de } (N \cap A)}{\text{masa de } A} = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

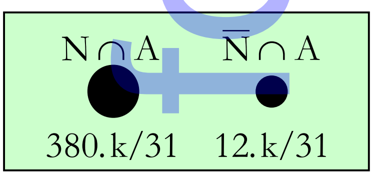
$$= \frac{P(N).P(A/N)}{P(N).P(A/N) + P(\overline{N}).P(A/\overline{N})} = \frac{\frac{19}{31}.20.k}{\frac{19}{31}.20.k + \frac{12}{31}.k} = \frac{380}{392}$$

VENTANA

* Regla de la multiplicación: $P(N \cap A) = P(N).P(A/N)$

* Según el teorema de la probabilidad total, es: $P(A) = P(N).P(A/N) + P(\overline{N}).P(A/\overline{N})$

- **Remate torero:** si un día hay accidente, **el espacio muestral se reduce** al de la figura, y la probabilidad de que haya niebla es la **proporción** entre el número $380.k/31$ que expresa la probabilidad del suceso $N \cap A$ y el número $(380.k/31) + (12.k/31)$, que expresa la masa total de probabilidad en el **nuevo espacio muestral.**



FONEMATO 1.15.8

Si se seleccionan "k" dados con probabilidad $1/2^k$ y tras lanzarlos se obtiene suma 4, determínese la probabilidad de haber jugado con cuatro dados.

SOLUCIÓN

Sea N_k el suceso de seleccionar "k" dados y "S" el suceso de obtener suma 4 al lanzar los "k" dados. **Obvio:** si la suma es 4, como mucho se ha jugado con 4 dados, pues lanzando 5 o más dados es imposible obtener suma 4. Es:

$$P(S/N_1) = 1/6$$

Si se lanza 1 dado hay un caso favorable al suceso de obtener suma 4, habiendo seis casos posibles

$$P(S/N_2) = 3/6^2$$

Si se lanzan 2 dados hay 3 casos favorables al suceso de obtener suma 4 (los casos (1;3), (2;2) y (3;1), habiendo 6^2 casos posibles

$$P(S/N_3) = 3/6^3$$

Si se lanzan 3 dados hay 3 casos favorables al suceso de obtener suma 4 (los casos (1;1;2), (1;2;1) y (2;1;1), habiendo 6^3 casos posibles

$$P(S/N_4) = 1/6^4$$

Si se lanzan 4 dados hay 1 caso favorable al suceso de obtener suma 4 (el caso (1;1;1;1), habiendo 6^4 casos posibles

Se mira el resultado de un experimento aleatorio (se ha obtenido suma 4) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se nos pide la probabilidad de que se haya jugado con 4 dados). Según el **teorema de Bayes** (versión cinemascope), es:

según la definición de probabilidad condicionada

$$P(N_4/S) = \frac{P(N_4 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(N_4).P(S/N_4)}{P(N_1).P(S/N_1) + ... + P(N_4).P(S/N_4)} =$$

* Regla de la multiplicación: $P(N_4 \cap S) = P(N_4).P(S/N_4)$

VENTANA

* Según el teorema de la probabilidad total, es:

$P(S) = P(N_1).P(S/N_1) + ... + P(N_4).P(S/N_4)$

$$= \frac{\frac{1}{2^4}.\frac{1}{6^4}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{6} + \frac{1}{2^2}.\frac{3}{6^2} + \frac{1}{2^3}.\frac{1}{6^3} + \frac{1}{2^4}.\frac{1}{6^4}}$$

$P(N_1) = 1/2^1$; $P(N_2) = 1/2^2$; $P(N_3) = 1/2^3$; $P(N_4) = 1/2^4$

FONEMATO 1.15.9

En el mercado de un producto se sabe que el 30 % de los días de transacción intervienen especuladores. La probabilidad de que el precio del producto baje por las fuerzas libres del mercado es del 40 %, mientras que la probabilidad de que suba el precio por la actuación de los especuladores es del 80 %. Si hoy el precio ha bajado, calcúlese la probabilidad de que hayan actuado especuladores.

SOLUCIÓN

Siendo E el suceso de que un día intervengan los especuladores y F el suceso de que actúen las fuerzas del mercado, es $P(E)=0'3$ y $P(F)=0'7$; y siendo B el suceso de que un día baje el precio, es $P(B/F)=0'6$ y $P(B/E)=1-0'8=0'2$.

Se mira el resultado de un experimento aleatorio (hoy el precio ha bajado) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se pide la probabilidad de que hayan actuado especuladores). Según el **teorema de Bayes** (versión escupitajo), es:

$$P(E/B)=\frac{P(E).P(B/E)}{P(F).P(B/F)+P(E).P(B/E)}=\frac{0'3.0'2}{0'7.0'6+0'3.0'2}$$

En temas siguientes veremos más ejercicios sobre Bayes, pero las probabilidades de algunas "ramas" del árbol del correspondiente experimento por etapas estarán ligadas a "sucesos" relacionados con variables aleatorias

Por ejemplo: El 60 % de las llamadas a un teléfono las hacen mujeres. La duración de una llamada (en minutos) tiene distribución $\text{Exp.}(2)$ si la hace una mujer, y distribución $N(2;1)$ si la hace un hombre. Si una llamada ha durado más de 2 mínutos, calcúlese la probabilidad de que la haya hecho un hombre.

Solución

Siendo M el suceso de la llamada la haga una mujer y H el suceso de que la haga un hombre, es $P(M)=0'6$ y $P(H)=0'4$; así, siendo B el suceso de que una llamada dure más de dos mínutos, según el teorema de Bayes, es

$$P(H/B)=\frac{P(H).P(B/H)}{P(H).P(B/H)+P(M).P(B/M)}=.....$$

Sólo falta calcular la probabilidad $P(B/H)$ de que una variable aleatoria $N(2;1)$ tome un valor mayor que 2, y la probabilidad $P(B/M)$ de que una variable aleatoria $\text{Exp.}(2)$ tome un valor mayor que 2 ..... de esos cálculos no te preocupes; ahora basta con tomar buena nota de que **más adelante volverás a tropezar con Bayes, y las probabilidades de las ramas del árbol del correspondiente experimento por etapas estarán ligadas a sucesos relacionados con variables aleatorias.**

Teorema general del conteo

Si una operación o experimento puede realizarse de n_1 formas y por cada una de ellas una segunda operación puede realizarse de n_2 formas, entonces las dos operaciones pueden realizarse de $n_1.n_2$ formas.

Combinaciones ordinarias

Siendo "A" un conjunto formado por "n" elementos distintos, **llamamos combinación de orden "m" a todo subconjunto de "A" formado por "m" elementos.** El número de combinaciones de orden "m" que pueden formarse con los "n" elementos de "A" se denota C_m^n:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!.(n-m)!} \equiv \binom{n}{m}$$

donde

$$n! = 1.2.3.....n \ ; \ m! = 1.2.3.....m \ ; \ (n-m)! = 1.2.3.....(n-m)$$

Permutaciones con repetición

Si un conjunto "A" lo forman h_1 elementos iguales a a_1, h_2 elementos iguales a a_2, ... y h_k elementos iguales a a_k (siendo $h_1 + h_2 + ... + h_k = n$), **llamamos permutación con repetición a toda alineación de los elementos de "A".** El número de permutaciones con repetición que se pueden formar con los "n" elementos de "A" se denota $PR^n_{h_1,h_2,...,h_k}$, siendo:

$$PR^n_{h_1,h_2,...,h_k} = \frac{n!}{(h_1!).(h_2!)......(h_k!)} = n!$$

$$\boxed{\text{si todos los elementos de "A" son distintos} \Rightarrow h_1 = h_2 = ... = h_k = 1}$$

Si $k = 2$, caso que tendrá protagonismo estelar en el Tema 3, cuando estudiemos la **variable aleatoria** llamada **binomial**, es:

$$PR^n_{h_1,h_2} = \frac{n!}{h_1!.h_2!} = \begin{cases} = \dfrac{n!}{h_1!.(n-h_1)!} = \dbinom{n}{h_1} \\ = \dfrac{n!}{(n-h_2)!.h_2!} = \dbinom{n}{h_2} \end{cases}$$

$$\boxed{h_1 + h_2 = n \Rightarrow \begin{cases} h_2 = n - h_1 \\ h_1 = n - h_2 \end{cases}}$$

Por ejemplo, siendo $A = \{a,a,a,b,b\}$ es $k = 2$, $h_1 = 3$ y $h_2 = 2$; así, el número de permutaciones con repetición o alineaciones que pueden formarse con los 5 elementos de "A" es 10 (pues $PR^5_{3,2} = 5!/(3!.2!) = 10$), que son las siguientes:

aaabb ; aabab ; abaab ; baaab ; aabba
ababa ; baaba ; abbaa ; babaa ; bbaaa

FONEMATO 1.16.1

1) ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de 5 personas de entre 12 personas? ¿Y si el comité lo forman 7 personas?
2) ¿De cuántas formas pueden 15 objetos distintos dividirse en dos grupos de 6 y 9 objetos respectivamente?
3) Dispones de cuatro monedas de distintos valores, ¿cuántas sumas diferentes de dinero puedes formar con ellas?
4) Con siete consonantes y cinco vocales diferentes, ¿cuántas palabras pueden formarse de modo que tengan cuatro consonantes y tres vocales?
5) ¿Cuántos subconjuntos de 7 cartas con 2 oros y 5 bastos se pueden formar con una baraja de 40 cartas?

SOLUCIÓN

1) El número de subconjuntos de 5 elementos que pueden formarse a partir de 12 elementos distintos coincide con el número de subconjuntos de 7 elementos que pueden formarse a partir de dichos 12 elementos; dicho número es:

$$C_{7}^{12} = \frac{12!}{7!.5!} = C_{5}^{12}$$

2) El número de subconjuntos de 6 elementos que pueden formarse a partir de 15 elementos distintos es C_{6}^{15}, que coincide con el número de subconjuntos de 9 elementos que pueden formarse a partir de 15 elementos distintos.

3) A la hora de elegir monedas para formar sumas, puedes elegir hacer sumas con una moneda (el número tales de sumas es $C_{1}^{4} = 4$), sumas con dos monedas (el número tales sumas es $C_{2}^{4} = 6$), sumas con tres monedas (el número de tales sumas es $C_{3}^{4} = 4$) y sumas con cuatro monedas (el número de tales sumas es $C_{4}^{4} = 1$). En total 15 sumas distintas.

4) Las cuatro consonantes pueden seleccionarse de $C_{4}^{7} = 35$ formas distintas.
Las dos vocales pueden seleccionarse de $C_{2}^{5} = 10$ formas distintas.
Las 7 letras seleccionadas pueden alinearse de $7! = 5040$ formas distintas.
Según el Teorema General del Conteo, el número pedido es $35 . 10 . 5040$

5) A partir de los 10 oros de la baraja pueden formarse C_{2}^{10} subconjuntos de dos oros, y a partir de los 10 bastos de la baraja pueden formarse C_{5}^{10} subconjuntos de cinco bastos. Por tanto, según el Teorema General del Conteo, el número pedido es $C_{2}^{10} . C_{5}^{10}$.

Acostúmbrate a usar "ventanas": como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño.

FONEMATO 1.16.2

A partir de un grupo de 5 hombres y 7 mujeres se forma un comité con 2 hombres y 3 mujeres.

1) ¿De cuántas formas puede formarse el comité si puede pertener a él cualquiera de las 12 personas?
2) ¿De cuántas formas puede formarse el comité si una mujer determinada ha de pertenecer a él?
3) ¿De cuántas formas puede formarse el comité si dos hombres determinados no pueden pertenecer a él?

SOLUCIÓN

1) Dos hombres de un total de 5 hombres pueden elegirse de C_2^5 formas.

   Tres mujeres de un total de 7 mujeres pueden elegirse de C_3^7 formas.

   Según el Teorema General del Conteo, el número pedido es $C_2^5 . C_3^7 = 350$.

2) Dos hombres de un total de 5 hombres pueden elegirse de C_2^5 formas.

   Si de las 7 mujeres una en concreto debe pertenecer al comité, quedan 6 mujeres para cubrir las dos plazas restantes de mujer, y dichas dos mujeres se pueden elegir de C_2^6 formas.

   Según el Teorema General del Conteo, el número pedido es $C_2^5 . C_2^6 = 150$.

3) Tres mujeres de un total de 7 mujeres pueden elegirse de C_3^7 formas.

   Si de los 5 hombres dos en concreto no deben pertenecer al comité, quedan 3 hombres para cubrir las dos plazas reservadas a los hombres, y dichos dos hombres pueden elegirse de C_2^3 formas.

   Según el Teorema General del Conteo, el número pedido es $C_3^7 . C_2^3 = 105$.

FONEMATO 1.16.3

De una urna con 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules se extraen 3 bolas al azar.

Se pide:

1) Probabilidad de que las tres sean rojas.
2) Probabilidad de que las tres sean blancas.
3) Probabilidad de que 2 sean rojas y 1 sea blanca.
4) Probabilidad de que al menos una sea blanca.
5) Probabilidad de que se extraiga una de cada color.
6) Probabilidad de que se extraigan en el orden roja, blanca, azul.
7) Probabilidad de que ninguna sea roja.

SOLUCIÓN

1) Siendo R_i el suceso de que la i-ésima bola extraída $(i = 1,2,3)$ sea roja, se nos pide la probabilidad del suceso $S_1 = R_1 \cap R_2 \cap R_3$:

$$P(S_1) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1).P(R_2/R_1).P(R_3/R_1 \cap R_2) =$$
$$= \frac{8}{20}.\frac{7}{19}.\frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

También puedes lidiar así:

$$P(S_1) = \frac{\text{número de casos favorables a } S_1}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_3^8}{C_3^{20}} = \frac{14}{285}$$

VENTANA

El número de subconjuntos de 3 bolas rojas que se pueden formar a partir de 8 bolas rojas es C_3^8, y el número de subconjuntos de 3 bolas que se pueden formar a partir de las 20 bolas de la urna es C_3^{20}

2) Siendo B_i el suceso de que la i-ésima bola extraída $(i = 1,2,3)$ sea blanca, se nos pide la probabilidad del suceso $S_2 = B_1 \cap B_2 \cap B_3$:

$$P(S_2) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1).P(B_2/B_1).P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{3}{20}.\frac{2}{19}.\frac{1}{18}$$

También puedes lidiar así:

$$P(S_2) = \frac{\text{número de casos favorables a } S_2}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_3^3}{C_3^{20}}$$

3) El suceso de que 2 bolas sean rojas y 1 sea blanca es

$$S_3 = (R_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

siendo:

$$P(S_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) =$$

$(R_1 \cap R_2 \cap B_3)$, $(R_1 \cap B_2 \cap R_3)$ y $(B_1 \cap R_2 \cap R_3)$ son incompatibles

$$= P(R_1).P(R_2/R_1).P(B_3/R_1 \cap R_2) + P(R_1).P(B_2/R_1).P(R_3/R_1 \cap B_2) +$$
$$+ P(B_1).P(R_2/B_1).P(R_3/B_1 \cap R_2) = ...$$

Es más rápido así:

$$P(S_3) = \frac{\text{número de casos favorables a } S_3}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_2^8 . C_1^3}{C_3^{20}} = \frac{7}{95}$$

A partir de las 8 bolas rojas pueden formarse C_2^8 subconjuntos de dos bolas rojas, y a partir de 3 bolas blancas pueden formarse C_1^3 subconjuntos de una bola blanca; así, según el Teorema General del Conteo, el número de casos favorables al suceso S_3 es $C_2^8 . C_1^3$

4) El suceso S_4 de que alguna bola sea blanca es el complementario del suceso de que ninguna bola sea blanca; así:

$$P(S_4) = 1 - P(\text{ninguna blanca}) =$$
$$= 1 - \frac{\text{casos favorables a ninguna blanca}}{\text{casos posibles}} = 1 - \frac{C_3^{17}}{C_3^{20}}$$

A partir de las 17 bolas no blancas pueden formarse C_3^{17} subconjuntos de tres bolas no blancas

También puedes decir $S_4 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \Rightarrow P(S_4) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \ldots$, pero tardarás mucho más en lidiar.

5) Siendo S_5 el suceso de que cada bola sea de un color, es:

$$P(S_5) = \frac{\text{casos favorables a } S_5}{\text{casos posibles}} = \frac{C_1^8 . C_1^3 . C_1^9}{C_3^{20}}$$

VENTANA

A partir de las 8 bolas rojas pueden formarse C_1^8 subconjuntos de una bola, a partir de 3 bolas blancas pueden formarse C_1^3 subconjuntos de una bola, y a partir de 9 bolas azules pueden formarse C_1^9 subconjuntos de una bola. Así, según el Teorema General del Conteo, el número de casos favorables al suceso S_5 es $C_1^8 . C_1^3 . C_1^9$

6) Probablidad del suceso S_6 de que se extraigan en el orden roja, blanca, azul:

$$P(S_6) = P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) = P(R_1).P(B_2/R_1).P(A_3/R_1 \cap B_2) =$$
$$= (8/20).(3/19).(9/18)$$

7) Probabilidad del suceso S_7 de que ninguna bola sea roja:

$$P(S_7) = \frac{\text{casos favorables a } S_7}{\text{casos posibles}} = \frac{C_3^{11}}{C_3^{20}}$$

A partir de las 11 bolas no rojas pueden formarse C_3^{11} subconjuntos de tres bolas no rojas

FONEMATO 1.16.4

Sacando 5 cartas de una baraja de 40, determínese la probabilidad de extraer:

1) Cuatro ases.
2) Cuatro ases y un rey.
3) Tres ases y dos sotas.
4) As, siete, sota, caballo y rey en cualquier orden.
5) Tres cartas de un palo cualquiera y dos de otro.
6) Al menos un as.
7) Tres figuras y dos cartas inferiores a 5.
8) No más de un as.
9) Un número par de figuras.

SOLUCIÓN

En todos los casos usaremos la **regla de Laplace:**

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso S}}{\text{número de casos posibles}}$$

1) $$P(4 \text{ ases}) = \frac{C_4^4 . C_1^{36}}{C_5^{40}}$$

VENTANA

A partir de los 4 ases pueden formarse C_4^4 subconjuntos de cuatro ases, y a partir de las 36 cartas restantes pueden formarse C_1^{36} subconjuntos de una carta; así, según el Teorema General del Conteo, el número de casos favorables es $C_4^4 . C_1^{36}$. El número de subconjuntos de 5 cartas que se pueden formar con las 40 cartas es C_5^{40}.

2) $$P(4 \text{ ases y } 1 \text{ rey}) = \frac{C_4^4 . C_1^4}{C_5^{40}}$$

A partir de los 4 ases pueden formarse C_4^4 subconjuntos de cuatro ases, y a partir de los 4 reyes pueden formarse C_1^4 subconjuntos de un rey

3) $$P(3 \text{ ases y } 2 \text{ sotas}) = \frac{C_3^4 . C_2^8}{C_5^{40}}$$

A partir de los 4 ases pueden formarse C_3^4 subconjuntos de tres ases, y a partir de las 4 sotas pueden formarse C_2^4 subconjuntos de dos sotas

4) Sea S es el suceso de obtener as, siete, sota, caballo y rey en cualquier orden:

$$P(S) = \frac{C_1^4 . C_1^4 . C_1^4 . C_1^4}{C_5^{40}}$$

5) Sea T el suceso de obtener tres cartas de un palo cualquiera y dos de otro:

$$P(T) = \frac{\left(4.C_{3}^{10}\right).\left(3.C_{2}^{10}\right)}{C_{5}^{40}}$$

VENTANA

A partir de las 10 cartas de un palo cualquiera pueden formarse C_{3}^{10} subconjuntos de tres cartas, y como hay 4 palos, el número de subconjuntos de tres cartas del mismo palo es $4.C_{3}^{10}$. A partir de las 10 cartas de un palo cualquiera pueden formarse C_{2}^{10} subconjuntos de dos cartas, y como quedan 3 palos para elegir, el número de subconjuntos de dos cartas del mismo palo que pueden formarse con esos tres palos es $3.C_{2}^{10}$.

6) $$P(\text{al menos un as}) = 1 - P(\text{ningún as}) = 1 - \left(C_{5}^{36}/C_{5}^{40}\right)$$

A partir de las 36 cartas que no son ases pueden formarse C_{5}^{36} subconjuntos de cinco cartas

7) Siendo X el suceso de obtener tres figuras y dos cartas inferiores a 5, es:

$$P(X) = (C_{3}^{12}.C_{2}^{16})/C_{5}^{40}$$

A partir de las 12 figuras pueden formarse C_{3}^{12} subconjuntos de tres figuras, y a partir de las 16 cartas inferiores a 5 pueden formarse C_{2}^{16} subconjuntos de dos cartas

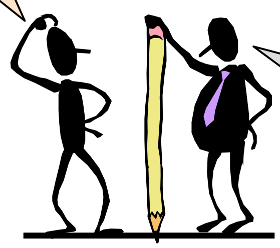
8) $$P(\text{no más de un as}) = P(\text{ningún as}) + P(1\ \text{as}) = \frac{C_{5}^{36}}{C_{5}^{40}} + \frac{C_{1}^{4}.C_{4}^{36}}{C_{5}^{40}}$$

9) Siendo W el suceso de obtener un número par de figuras, es:

$$P(W) = P(\text{ninguna figura}) + P(2\ \text{figuras}) + P(4\ \text{figuras}) =$$

$$= \frac{C_{5}^{28}}{C_{5}^{40}} + \frac{C_{2}^{12}.C_{3}^{28}}{C_{5}^{40}} + \frac{C_{4}^{12}.C_{1}^{28}}{C_{5}^{40}}$$

Deduzco que si "N" es el tamaño de una población (de personas o de lo que sea) y "p" es la proporción de individuos de esa población que poseen una cierta característica "A", entonces, si seleccionamos "n" individuos, la probabilidad de que entre ellos haya "x" individuos con la característica "A" es $\dfrac{\binom{N.p}{x}.\binom{N-N.p}{n-x}}{\binom{N}{n}}$



¡Máquina!... acabas de inventar la variable aleatoria llamada hipergeométrica de parámetros "N", "n" y "p"... la estudiaremos en el Tema 4

FONEMATO 1.16.5

Entre 15 dirigentes de un partido político hay 5 corruptos. Si se seleccionan 3 dirigentes, determínese la probabilidad de los siguientes sucesos:

1) Ninguno de los seleccionados es corrupto.
2) Entre los seleccionados hay un corrupto.
3) Entre los seleccionados hay al menos un corrupto.
4) Todos los seleccionados son corruptos.
5) Entre los seleccionados hay dos corruptos.
6) Entre los seleccionados no hay más de un corrupto.

SOLUCIÓN

En todos los casos usaremos la **regla de Laplace:**

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables a S}}{\text{número de casos posibles}}$$

1) $$P(\text{ningún corrupto}) = \frac{C_3^{10}}{C_3^{15}}$$

VENTANA

A partir de los 10 no corruptos pueden formarse C_3^{10} subconjuntos de 3 individuos. El número de subconjuntos de 3 políticos que se pueden formar con 15 políticos es C_3^{15}.

2) $$P(1 \text{ corrupto}) = \frac{C_1^5 . C_2^{10}}{C_3^{15}}$$

A partir de los 5 corruptos pueden formarse C_1^5 subconjuntos de un corrupto, y a partir de los 10 no corruptos pueden formarse C_2^{10} subconjuntos de dos no corruptos

3) $$P(\text{al menos 1 corrupto}) = 1 - P(\text{ningún corrupto}) = 1 - \frac{C_3^{10}}{C_3^{15}}$$

4) $$P(3 \text{ corruptos}) = \frac{C_3^5}{C_3^{15}}$$

5) $$P(2 \text{ corruptos}) = \frac{C_2^5 . C_1^{10}}{C_3^{15}}$$

6) $$P(\text{no más de un corrupto}) = P(\text{ningún corrupto}) + P(1 \text{ corrupto}) =$$

$$= \frac{C_3^{10}}{C_3^{15}} + \frac{C_1^5 . C_2^{10}}{C_3^{15}}$$

FONEMATO 1.16.6

En San Fermín corren 6 toros bravos y 9 mansos. Uno de los días dos toros quedan rezagados del grupo, y por experiencia se sabe la probabilidad de que haya algún herido es 0'8 si los dos toros rezagados son bravos, 0'6 si quedan rezagados un toro bravo y uno manso, y 0'2 si los dos rezagados son mansos.

Calcúlese la probabilidad de que haya algún herido. Si lo ha habido, determínese la probabilidad de que los dos toros rezagados hayan sido bravos.

SOLUCIÓN

Siendo T_i el suceso de que queden rezagados "i" toros bravos (i = 0,1,2), es:

$$P(T_0)=\frac{\text{número de casos favorables a } T_0}{\text{número de casos posibles}}=\frac{C_2^9}{C_2^{15}}=\frac{36}{105}$$

Con los 9 toros mansos pueden formarse C_2^9 subconjuntos de 2 mansos.. El número de subconjuntos de 2 toros que pueden formarse con 15 toros es C_2^{15}.

$$P(T_1)=\frac{\text{número de casos favorables a } T_1}{\text{número de casos posibles}}=\frac{C_1^6.C_1^9}{C_2^{15}}=\frac{54}{105}$$

Con 6 toros bravos pueden formarse C_1^2 subconjuntos de un toro bravo, y con 9 toros mansos pueden formarse C_1^9 subconjuntos de un toro manso

$$P(T_2)=\frac{\text{número de casos favorables a } T_2}{\text{número de casos posibles}}=\frac{C_2^6}{C_2^{15}}=\frac{15}{105}$$

VENTANA

Con 6 bravos pueden formarse C_2^6 subconjuntos de dos bravos

Si H es el suceso de que haya algún herido, es $P(H/T_0)=0'2$, $P(H/T_1)=0'6$ y $P(H/T_2)=0'8$; así, según el **teorema de la probabilidad total,** es:

$$P(H)=P(T_0).P(H/T_0)+P(T_1).P(H/T_1)+P(T_2).P(H/T_2)=$$
$$=\frac{36}{105}.0'2+\frac{54}{105}.0'6+\frac{15}{105}.0'8$$

Se mira el resultado de un experimento aleatorio (ha habido algún herido) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (se nos pide la probabilidad de que los dos toros rezagados sean bravos).

Según el **teorema de Bayes** (versión escupitajo), es:

$$P(T_2/H)=\frac{P(T_2).P(H/T_2)}{P(H)}=....$$

En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes.

EL PROFESOR QUE CORRIGE TU EXAMEN

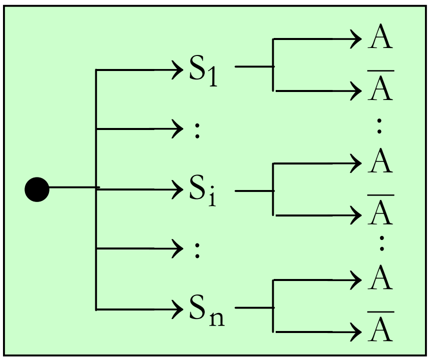
Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en muchos casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, no hace falta ser un lince para entender que lo que escribamos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás... y para conseguir eso basta escribir pensando que el profe que te ha de corregir "no se lo sabe" y por tanto hay que "llevarle de la mano", explicándole todos los aspectos relevantes de las conexiones neuronales que establezcamos en cada caso y sembrando el examen con latiguillos que nos hagan parecer auténticos profesionales.

- **Megalatiguillo de remate relacionado con el concepto de "probabilidad":** tras averiguar que "p" es la probabilidad de un suceso "A", quedarás como torero de enorme tronío si escribes: el que P(A) = p significa que la frecuencia relativa de "A" converge en probabilidad a "p"; o sea, repitiendo el experimento bastantes veces, dicha frecuencia se aproxima a "p" tanto como se quiera... y al escribir o decir tal cosa, procura contener la risa, para que no se note que no tienes ni puñetera idea de **qué es** la convergencia en probabilidad, asunto del que nos separan un montón de páginas, pues lo estudiaremos en el primer tema de Inferencia Estadística.

- A la menor ocasión, **introduce el concepto de proporción:**
  - ∗ **Al hablar de la probabilidad condicionada:** la probabilidad del suceso B/A es la proporción entre la masa (probabilidad) del suceso $A \cap B$ y la masa del suceso "A".
  - ∗ **Al hablar de la independencia de sucesos:** "A" y "B" son independientes si la proporción $P(B/A)$ entre la masa de $A \cap B$ y la masa de "A" coincide con la proporción $P(B)$ entre la masa de "B" y la de Ω... y la proporción $P(A/B)$ entre la masa de $A \cap B$ y la masa de "B" coincide con la proporción $P(A)$ entre la masa de "A" y la de Ω.
  - ∗ **Recuerda:** si "A" y "B" son independientes, la probabilidad de que ocurra uno de ellos no se altera por el hecho de que ocurra o no el otro.
- Si usas la **regla de Laplace,** explica que su eso sólo es legítimo si el espacio muestral está formado por un número finito de resultados equiprobables.
- **Experimentos por etapas**

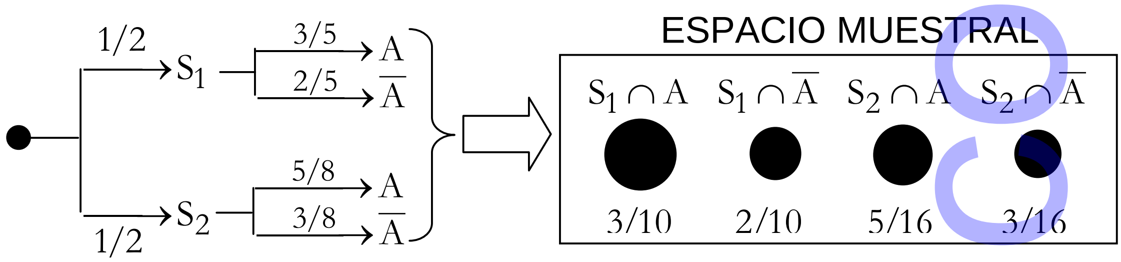
  Si te plantean un experimento por etapas, explícitalo claramente y dibuja su correspondiente "árbol".



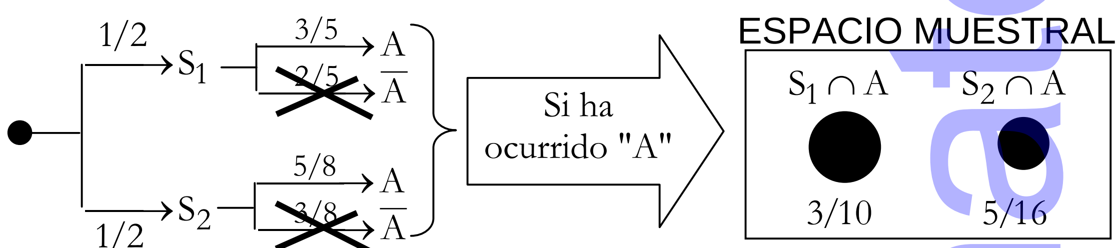
Si en un experimento con infinitas etapas encuentras una serie geométrica (suma de los infinitos términos de una progresión geométrica), explicítalo y explica que esas series sólo convergen si $|\text{razón}| < 1$.

• **Latiguillo de arranque para Bayes:** se mira el resultado de un experimento aleatorio (ha sucedido "Tal") y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado se deba a una causa particular entre todas las posibles causas (se nos pide la probabilidad de que sea "Pascual" la causa de que haya sucedido "Tal").

Con Bayes **emplea siempre la "solución cinemascope":** para calcular la probabilidad del suceso S_i/A, hablarás de la probabilidad condicionada, de la regla de la multiplicación y del teorema de probabilidad total, incluyendo el árbol del correspondiente experimento por etapas.



Y **remata** explicando que el que haya ocurrido "A" hace que el espacio muestral se reduzca a "A", siendo $P(S_i/A)$ la proporción entre la masa del suceso $A \cap S_i$ y la masa (probabilidad) de "A", que es el nuevo universo referencial.



Reserva la "solución escupitajo" para cuando encuentres a Bayes en mitad de la guerra de las Galias y por tener fundida la junta de la culata del motor de arranque de la catapulta de sotavento andes jodido de tiempo y no puedas entretenerte con florituras.

Acostúmbrate a usar "ventanas": como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profesor te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

$$P(S_i/A) = \frac{\text{masa de } (S_i \cap A)}{\text{masa de } A} = \frac{P(S_i \cap A)}{P(A)} =$$

según la definición de probabilidad condicionada

$$= \frac{P(S_i).P(A/S_i)}{P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + ... + P(S_n).P(A/S_n)}$$

* Regla de la multiplicación: $P(S_i \cap A) = P(S_i).P(A/S_i)$
* Según el teorema de la probabilidad total, es:
$P(A) = P(S_1).P(A/S_1) + P(S_2).P(A/S_2) + ... + P(S_n).P(A/S_n)$