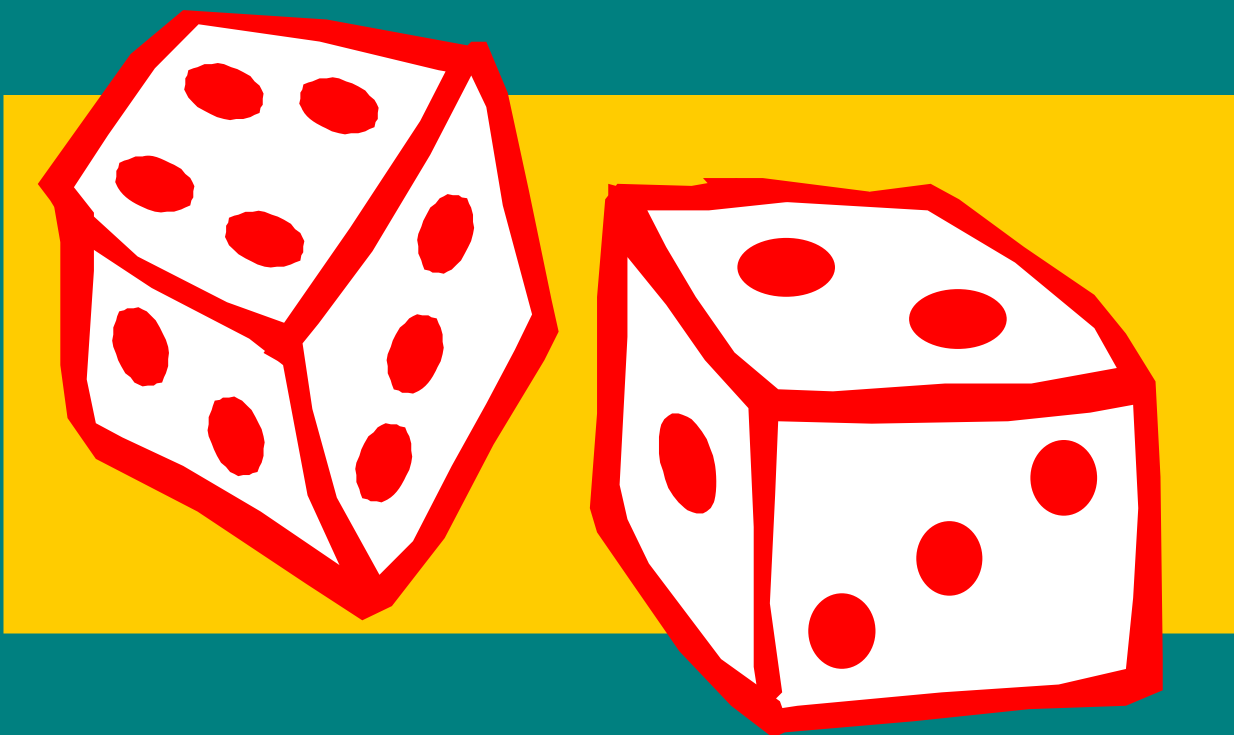
ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Volumen I

Distribuciones de probabilidad

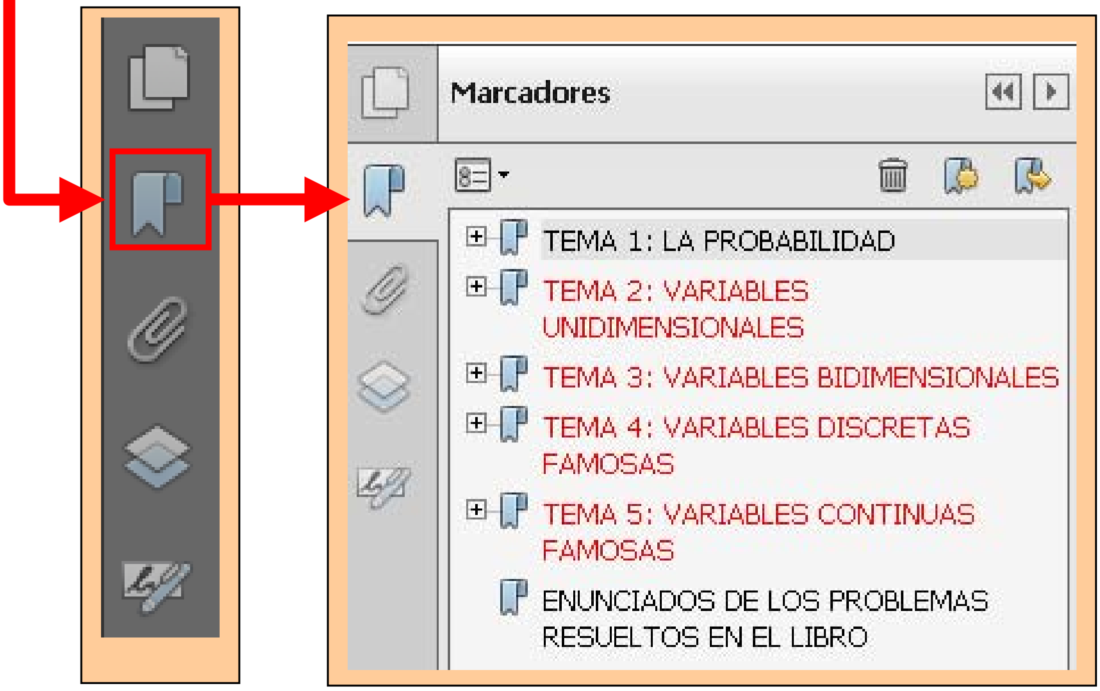


Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

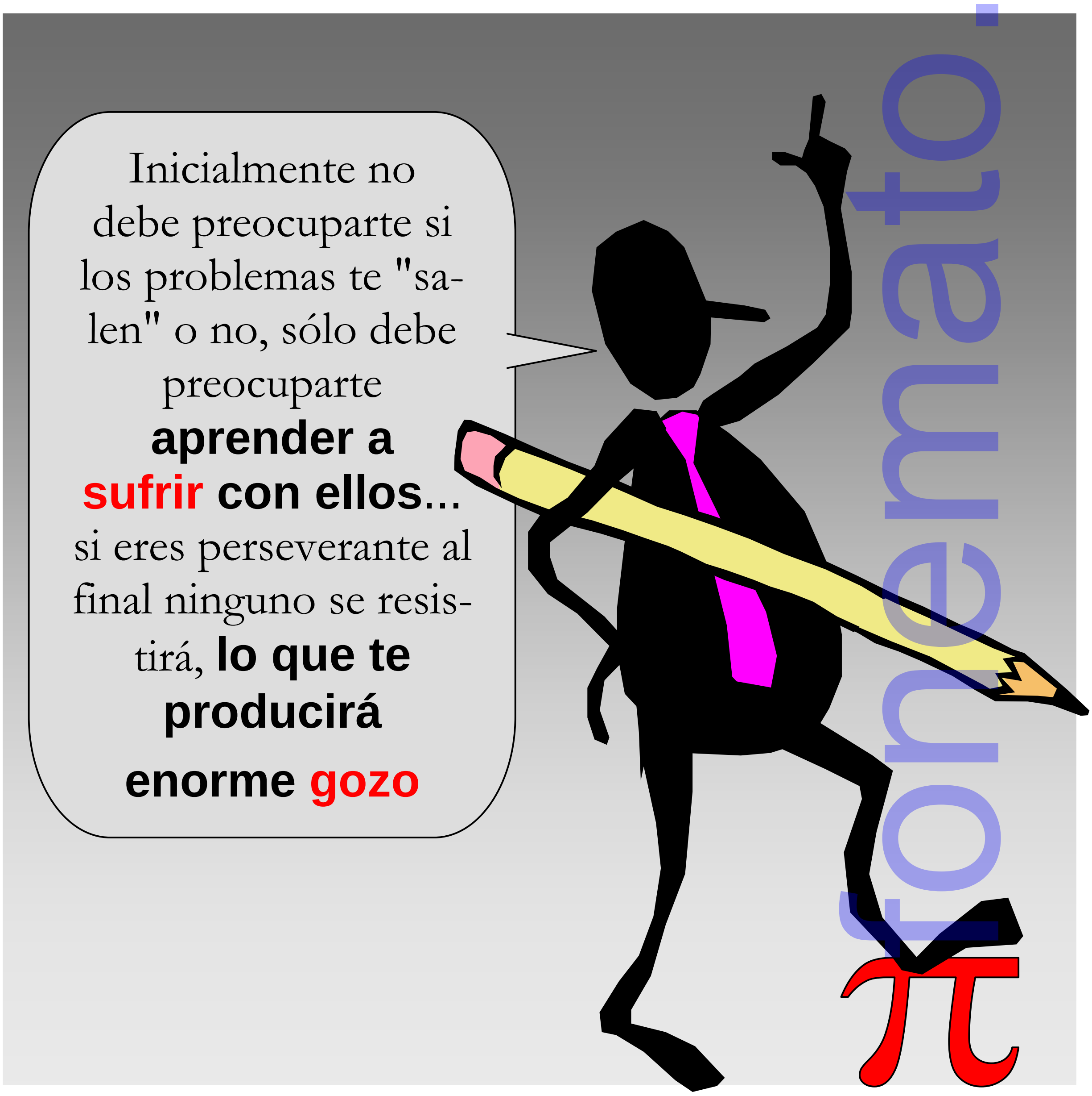
Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Volumen I: Distribuciones de probabilidad

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS EN EL LIBRO



1.6.1 Si A, B y C son sucesos correspondientes a un cierto experimento, determínense las expresiones de los siguientes sucesos:

1) Ocurre sólo A.
2) Ocurren A y B pero no C.
3) Ocurren los tres.
4) Ocurre al menos uno.
5) Ocurren al menos dos.
6) Ocurre uno y sólo uno.
7) Ocurren dos y sólo dos.
8) No ocurre ninguno.
9) No ocurren más de dos.

1.6.2 De una baraja de 52 cartas se extrae una carta, siendo A el suceso de extraer un rey y B el suceso de extraer una copa. Descríbanse los siguientes sucesos:

$$1)\ A \cup B\ ;\ 2)\ A \cap B\ ;\ 3)\ A \cup \overline{B}\ ;\ 4)\ \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$5)\ A - B\ ;\ 6)\ \overline{A} - \overline{B}\ ;\ 7)\ \overline{B} - \overline{A}\ ;\ 8)\ (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

1.6.3 Demuéstrense las leyes de Morgan.

1.9.1 Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 1/2$, $P(\overline{B}) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcúlense $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap B)$.

1.9.2 El 6 % de las piezas fabricadas por una máquina tiene el defecto A, el 4 % tiene el defecto B y el 2 % tiene ambos defectos. Calcúlese:

1) El porcentaje de piezas sin defecto.
2) El porcentaje de piezas con un defecto al menos.
3) El porcentaje de piezas con un único defecto.
4) El porcentaje de piezas que únicamente tienen el defecto B.

1.9.3 Considera un dado de seis caras trucado de modo que la probabilidad de obtener un número par es "a" y la de obtener un número impar es "b".

1) Calcúlense "a" y "b" sabiendo que la probabilidad del suceso A de obtener un número mayor o igual que 4 al lanzar el dado es $5/12$.
2) Calcúlese la probabilidad de que al lanzar el dado sea no inferior a 13 el número obtenido al sumar 3 al doble del resultado del lanzamiento.
3) Calcúlese la probabilidad de que al lanzar el dado sea no superior a 5 el número obtenido al restar 4 al triple del resultado del lanzamiento.

1.9.4 Pruébese que $P(A \cup B) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$.

1.11.1 Calcúlese la probabilidad de que al lanzar un dado de seis caras se obtenga un número par si el dado está equilibrado, si el dado está trucado de modo que los números pares se obtienen el doble de veces que los impares, y si el dado está trucado de modo que los números pares se obtienen el triple de veces que los impares.

1.12.1 Sean A y B sucesos de un cierto experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=1/2\ ;\ P(B)=1/3\ ;\ P(A\cap B)=1/4$$

Calcúlense $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}/\overline{B})$ y $P(\overline{B}/\overline{A})$.

1.12.2 Sean A y B sucesos de un cierto experimento aleatorio. Se sabe que:

$$P(A)=1/3\ ;\ P(B)=1/5\ ;\ P(A/B)+P(B/A)=2/3$$

Calcúlense $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

1.12.2 En un multicine funcionan dos salas A_1 y A_2. Siendo S_i el suceso de que en una sesión determinada la i-ésima sala $(i=1,2)$ se llene antes de empezar la proyección, se sabe que $P(S_1)=0'7, P(S_2)=0'5$ y $P(S_1\cap S_2)=0'45$. Calcúlese la probabilidad de que antes de empezar la proyección:

1) Se llene al menos una sala.
2) Se llene la sala A_1 pero no la A_2.
3) Ninguna de las dos salas se llene.
4) Al menos una de las dos salas no se llene.
5) Se llene A_2 supuesto que se ha llenado ya A_1, ¿coincide con $P(S_2)$?

1.12.4 En el experimento de lanzar un dado de seis caras al aire y observar el resultado, sean los sucesos $A=\{3,4,5,6\}$ y $B=\{2,4\}$.

Calcúlese la probabilidad de que ocurra B si se sabe que ha ocurrido A.

1.12.5 Se lanza un dado de seis caras trucado de modo que los números pares se obtie-nen la mitad de veces que los impares.

1) Calcúlese la probabilidad de obtener un número mayor que 3 si se sabe que se ha obtenido un número par.
2) Calcúlese la probabilidad de obtener un número par si se sabe que se ha obtenido un número mayor que 3.

1.12.6 Se dispone de tres palillos, uno de los cuales es corto.

Tres personas A, B y C seleccionan en ese orden un palillo, y pierde el que saque el palillo corto. Determínese la probabilidad de perder que tiene cada jugador.

1.12.7 De una urna con 9 bolas rojas y 5 negras se extraen sucesivamente y sin reposi-ción tres bolas. Calcúlese la probabilidad de que las dos primeras sean negras y la tercera sea roja.

1.12.8 Siendo A y B sucesos incompatibles, pruébese que:

$$P(A/A\cup B)=P(A)/(P(A)+P(B))$$

Pruébese que $P(B/A)\geq 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$, si $P(A)>0$ y $P(B/A)>0$.

1.12.9 Calcúlese $P((A \Delta B)/(A \cup B))$, siendo A y B sucesos tales que:

$$P(A) = 0'4 \;;\; P(B) = 0'3 \;;\; P(A \cap B) = 0'1$$

1.12.10 Calcúlese $P(A \cup B \cup C \cup D)$. Si cuatro matrimonios van a clases de baile y el profesor empareja al azar cada mujer con un hombre, calcúlese la probabilidad de que alguna mujer baile con su marido.

1.12.11 Pruébese que si $P(A/B) > P(A)$, entonces $P(B/A) > P(B)$.
¿Es cierto que si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A/C) > P(B/C)$?

1.13.1 El 82 % de los alumnos de un curso de ordeño de moscas con guantes de boxeo traduce ruso, el 68 % traduce francés y 60 % traduce ambos idiomas.

1) ¿Hay independencia?
2) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce al menos uno de los dos.
3) Calcúlese el porcentaje de alumnos que no traduce ninguno.
4) Calcúlese el porcentaje de alumnos que no traduce al menos uno de los dos.
5) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce francés pero no ruso.
6) Calcúlese el porcentaje de alumnos que traduce ruso pero no francés.
7) Entre los alumnos que traducen francés, ¿qué porcentaje traduce ruso?

1.13.2 Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio, siendo:

$$P(A) = 0'6 \; ; \; P(B) = 0'7 \; ; \; P(A \cup B) = 0'3 + P(A \cap B)$$

1) Calcúlense $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.
2) ¿Son independientes A y B?
3) ¿Es $P(A/B) = 0'6$?

1.13.3 Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio, siendo:

$$P(A) = 0'5 \; ; \; P(B) = 0'8 \; ; \; P(A \cap B) = 0'4$$

1) ¿Son compatibles A y B?
2) ¿Son independientes A y B?
3) Calcúlense $P(\overline{B}/A)$ y $P(\overline{A} \cup B)$.

1.13.4 Sean A y B dos sucesos tales que

$$P(A) = 0'3 \; ; \; P(B) = k \; ; \; P(A \cup B) = 0'8$$

1) ¿Para qué valor de "k" son incompatibles A y B?
2) ¿Para qué valor de "k" son independientes A y B?

1.13.5 Demuéstrese que si dos sucesos A y B de probabilidad no nula son incompa-tibles entonces son dependientes. ¿Son independientes dos sucesos compatibles?

1.13.6 Sean A, B y C tres sucesos correspondientes a un experimento aleatorio. Se sabe que los sucesos $A \cup B$ y C son incompatibles; además:

$$P(A) = 0'4 \; ; \; P(C) = 0'3 \; ; \; P(A \cap B) = 0'1 \; ; \; P(A \cup B \cup C) = 0'9$$

Calcúlense $P(B)$, $P(A/\overline{C})$ y $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

1.13.7 Un par de dados se lanzan dos veces y cada vez se observa el valor de la suma de los resultados obtenidos. Calcúlese la probabilidad de obtener suma siete una vez , al menos una vez, dos veces

1.13.8 Pruébese que $P(A/B) = P(A/\overline{B})$ si y sólo si A y B son independientes.

1.13.9 Pruébese que:

1) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}) \Rightarrow$ A y B son independientes
2) $P(A/B) + P(\overline{A}/\overline{B}) = 1 \Rightarrow$ A y B son independientes

1.13.10 Tres vecinos usan la misma línea de autobús para volver a casa. Cada uno, con independencia de los demás, elige el autobús de las 17 con probabilidad $1/4$, el de las 18 con probabilidad $1/2$ y el de las 19 con probabilidad $1/4$. Calcúlese la probabilidad de que coincidan en el mismo autobús.

1.13.11 Sea $F = \{A, B, C\}$ una familia completamente independiente de sucesos. Calcúlese $P\left(A \cup (\overline{B \cap C})\right)$ si $P(A) = 0'2, P(B) = 0'4$ y $P(C) = 0'5$.

1.13.12 Calcúlese la probabilidad de destruir el polvorín donde los malos guardan las armas de destrucción masiva si los buenos le disparamos tres misiles gordos y, con completa independencia unos de otros, la probabilidad de hacer blanco con cada disparo es $0'2$.

1.13.13 Pruebe que si $F = \{A, B, C\}$ es una familia completamente independiente de sucesos, también lo son las siguientes familias:

$$F_1 = \{A, B, \overline{C}\} \; ; \; F_2 = \{A, \overline{B}, \overline{C}\} \; ; \; F_3 = \{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\} \; ; \; F_4 = \{A, B, \Omega\}$$

1.13.14 Durante la garantía una máquina presenta tres tipos de fallos A, B y C completa-mente independientes unos de otros y con probabilidades respectivas $0'1, 0'2$ y $0'3$. Calcúlese la probabilidad de la máquina falle durante la garantía.

1.13.15¿Qué es más probable, obtener al menos un rey al lanzar 6 veces un dado u obtener al menos una pareja de reyes al lanzar 36 veces un par de dados?

1.13.16 Sea $F = \{A, B, C, D\}$ una familia completamente independiente de sucesos. Calcule $P(A \cap B / C \cup \overline{D})$. ¿Son independientes $A \cap B$ y $C \cup \overline{D}$?

1.13.17 La cadena de montaje de una fábrica está formada por cuatro máquinas y el fallo en cualquiera de ellas es completamente independiente de las restantes. Las dos primeras están en serie, y la probabilidad de que una de ellas falle es 0'5. Las otras dos funcionan en paralelo (hacen igual trabajo) y en serie respecto a las dos primeras, y la probabilidad de que una de éstas falle es $2/3$. Calcule la probabilidad de que la cadena de montaje funcione correctamente.

1.13.18 La probabilidad de que una máquina produzca una pieza defectuosa es 0'02, y el proceso de producción se detiene para el control preceptivo cuando se produce una pieza defectuosa. Calcúlese la probabilidad de que el proceso se detenga tras producir 5 piezas y la probabilidad de que se detenga antes de producir 51 piezas.

1.13.19 Tres jugadores A, B y C lanzan un dado de seis caras sucesivamente y en ese orden. Si gana el primero que obtenga un 4, calcúlese la probabilidad de ganar que tiene cada uno.

1.13.20 Siendo A, B y C tres sucesos definidos sobre el mismo espacio probabilístico y tales que $P(B)$ y $P(C)$ son mayores que cero. Demuéstrese que si B y C son independientes sucede que

$$P(A / B) = P(A / (B \cap C)).P(C) + P(A / (B \cap \overline{C})).P(\overline{C})$$

1.14.1 Una empresa emplea dos métodos alternativos A y B para fabricar un artículo. El 20 % de la producción se hace por el método A y el resto por el B.

Cuando a un cliente se le ofrece el artículo, la probabilidad de que lo compre es 0'7 si se fabricó por el sistema A, y 0'9 si se fabricó por el B. Calcúlese la probabilidad de que un cliente compre el artículo.

1.14.2 En un grupo formado por 40 hombres y 60 mujeres ocurre que el 30 % de los hombres y el 10 % de las mujeres tienen caspa. Determínese la probabilidad de que una persona del grupo elegida al azar tenga caspa.

1.14.3 Disponemos de 10 urnas, de las cuales:

- Dos urnas son del tipo 1, cada una con 2 bolas amarillas y 3 negras
- Una urna es del tipo 2, con 4 bolas amarillas y 2 negras
- Cuatro urnas son del tipo 3, cada una con 1 bola amarilla y 3 negras
- Tres urnas son del tipo 4, cada una con 5 bolas amarillas

1) Calcúlese la probabilidad de obtener bola amarilla si se elige al azar una urna y de ella se extrae una bola al azar.
2) Se lanza un dado y según que el resultado sea menor que 3 o no, se elige al azar una urna entre las de tipo par o entre las de tipo impar; después se extrae al azar una bola. Calcúlese la probabilidad de que sea negra.

1.14.4 Tres máquinas fabrican piezas similares. Las respectivas producciones diarias de cada máquina son 300, 450 y 600 piezas, y los respectivos porcentajes de piezas defectuosas son 2 %, 3 % y 4 %. Si al final del día se elige una pieza al azar, calcúlese la probabilidad de que sea defectuosa.

1.15.1 La urna A contiene 2 bolas negras y 3 rojas, y la urna B contiene 3 bolas negras y 5 rojas. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola al azar. Calcúlese la probabilidad de que la bola extraía sea roja. Si la bola extraída es negra, calcúlese la probabilidad de que proceda de la urna A.

1.15.2 Se lanza al aire una moneda elegida al azar de una urna que contiene 8 monedas correctas y 2 monedas defectuosas cuya probabilidad de cara es 0'7.

1) Calcúlese la probabilidad de obtener "cruz".
2) Si se ha obtenido "cara", calcúlese la probabilidad de que la moneda lanzada sea defectuosa.

1.15.3 La urna A contiene 3 bolas negras y 5 rojas, y la urna B contiene 4 bolas negras y 2 rojas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en la urna B, a continuación se extrae al azar una bola de B.

1) Calcúlese la probabilidad de que la bola extraída de B sea roja.
2) Si la bola extraída de B es roja, calcúlese la probabilidad de que la bola extraída de A haya sido negra.

1.15.4 Por los síntomas de un enfermo se deduce que padece la enfermedad A con probabilidad $1/3$ o la enfermedad B con probabilidad $2/3$. Para precisar el diag-nóstico se somete al enfermo a un análisis cuyos resultados posibles son positivo o negativo. Se sabe que en pacientes con la enfermedad A el análisis es positivo con probabilidad $0'98$, y en los que padecen la enfermedad B es positivo con probabilidad $0'06$. Si el resultado del análisis es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el enfermo padezca la enfermedad A? ¿Y la B?

1.15.5 Un fabricante de coches desea lanzar un modelo al mercado el próximo año y al estudiar la posible situación económica que habrá entonces contempla tres alter-nativas equiprobales: existencia de inflación, estabilidad o depresión. La probabi-lidad de que se lance el coche al mercado es 0'7 si hay inflación, 0'4 si hay esta-bilidad y 0'1 si hay depresión.

1) Calcúlese la probabilidad de que el coche se lance al mercado.
2) Si se lanza al mercado, determínese la probabilidad de que exista inflación.

1.15.6 Disponemos de 50 urnas de tres tipos; en cada urna tipo A hay 4 bolas rojas y 2 negras, en cada cada urna tipo B hay 2 bolas rojas y 4 negras, en cada urna tipo C hay 3 bolas rojas y 3 negras. Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola al azar. Determínese el número de urnas que hay de cada tipo sabiendo que si la bola extraída es roja entonces es $2/7$ la probabilidad de que proceda de una urna tipo A, y si es negra entonces es $1/2$ la probabilidad de que proceda de una urna tipo B.

1.15.7 En enero se ha producido un accidente al aterrizar un avión en un aeropuerto. Se sabe que en enero ha habido 19 días con niebla y que en estas circunstancias la probabilidad de accidente es 20 veces mayor que la probabilidad de accidente un día sin niebla. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente se haya producido un día con niebla?

1.15.8 Si se seleccionan "k" dados con probabilidad $1/2^k$ y tras lanzarlos se obtiene suma 4, determínese la probabilidad de haber jugado con cuatro dados.

1.15.9 En el mercado de un producto se sabe que el 30 % de los días de transacción intervienen especuladores. La probabilidad de que el precio del producto baje por las fuerzas libres del mercado es del 40 %, mientras que la probabilidad de que suba el precio por la actuación de los especuladores es del 80 %. Si hoy el precio ha bajado, calcúlese la probabilidad de que hayan actuado especuladores.

1.16.1 ¿De cuántas formas puede elegirse un comité de 5 personas de entre 12 personas? ¿Y si el comité lo forman 7 personas? ¿De cuántas formas pueden 15 objetos distintos dividirse en dos grupos de 6 y 9 objetos respectivamente? Dispones de cuatro monedas de distintos valores, ¿cuántas sumas diferentes de dinero puedes formar con ellas? Con siete consonantes y cinco vocales diferentes, ¿cuántas palabras pueden formarse de modo que tengan cuatro consonantes y tres vocales? ¿Cuántos subconjuntos de 7 cartas con 2 oros y 5 bastos se pueden formar con una baraja de 40 cartas?

1.16.2 De un grupo de 5 hombres y 7 mujeres se forma un comité con 2 hombres y 3 mujeres. ¿De cuántas formas puede formarse el comité si puede pertener a él cualquiera de las 12 personas? ¿De cuántas formas puede formarse el comité si una mujer concreta ha de pertenecer a él? ¿De cuántas formas puede formarse el comité si dos hombres determinados no pueden pertenecer a él?

1.16.3 De una urna con 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules se extraen 3 bolas.

1) Probabilidad de que las tres sean rojas.
2) Probabilidad de que las tres sean blancas.
3) Probabilidad de que 2 sean rojas y 1 sea blanca.
4) Probabilidad de que al menos una sea blanca.
5) Probabilidad de que se extraiga una de cada color.
6) Probabilidad de que se extraigan en el orden roja, blanca, azul.
7) Probabilidad de que ninguna sea roja.

1.16.4 Sacando 5 cartas de una baraja de 40, halle la probabilidad de extraer:

1) Cuatro ases.
2) Cuatro ases y un rey.
3) Tres ases y dos sotas.
4) As, siete, sota, caballo y rey en cualquier orden.
5) Tres cartas de un palo cualquiera y dos de otro.
6) Al menos un as.
7) Tres figuras y dos cartas inferiores a 5.
8) No más de un as.
9) Un número par de figuras.

1.16.5 Entre 15 dirigentes de un partido político hay 5 corruptos. Si se seleccionan 3 dirigentes, determínese la probabilidad de los siguientes sucesos:

1) Ninguno de los seleccionados es corrupto.
2) Entre los seleccionados hay un corrupto.
3) Entre los seleccionados hay al menos un corrupto.
4) Todos los seleccionados son corruptos.
5) Entre los seleccionados hay dos corruptos.
6) Entre los seleccionados no hay más de un corrupto.

1.16.6 En San Fermín corren 6 toros bravos y 9 mansos. Uno de los días dos toros quedan rezagados del grupo, y por experiencia se sabe la probabilidad de que haya algún herido es 0'8 si los dos toros rezagados son bravos, 0'6 si quedan rezagados un toro bravo y uno manso, y 0'2 si los dos rezagados son mansos. Calcúlese la probabilidad de que haya algún herido. Si lo ha habido, determínese la probabilidad de que los dos toros rezagados hayan sido bravos.

2.2.1 Calcúlese "k" para que las siguientes funciones sean las de probabilidad de una variable aleatoria discreta "X":

$$1)\ f(x) = k.\frac{x-1}{n},\ \ x = 2, 3, 4, \dots , n$$

$$2)\ f(x) = k.\frac{x-1}{n},\ \ x = 2, 3, 4, \dots , 2.n$$

2.2.2 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de probabilidad es

x	0	1	2	3	4
$f(x) = P(X = x)$	1/16	4/16	k	4/16	1/16

1) Calcúlense "k" y la función de distribución de "X".
2) Calcúlense las probabilidades de los sucesos $X \le 2'7$, $X > 2$ y $1 \le X < 4$.
3) Siendo $Y = 2.X + 1$, calcúlense $P(Y < 3)$ y $P(Y \ge 2)$.

2.2.3 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2/4 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

1) Calcúlese la función de probabilidad de "X".
2) Calcúlense las probabilidades de los sucesos $X = 1/2$ y $1'5 < X < 3$.
3) Siendo $Y = 2/(X + 3)$, calcúlese $P(Y \le 1/4)$.

2.2.4 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ b & \text{si } 1 \le x < 3 \\ c & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Determínese la función de probabilidad de "X" sabiendo que

$$P(1 \le X \le 3) = 0'7\ ;\ P(X = 3) = 0'4\ ;\ P(X \le 2) = 0'5$$

2.2.5 En un examen con tres preguntas la probabilidad de acertar la primera es $0'8$, la segunda $0'3$ y la tercera $0'5$. Determínese la función de distribución de la variable aleatoria "X" que expresa el número de preguntas acertadas.

2.2.6 La función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de periódicos que vende un kiosko en un día es

$$P(X = x) = \begin{cases} k.x & \text{si } x = 1, 2, \dots , 50 \\ k.(100 - x) & \text{si } x = 51, 52, \dots , 100 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Calcúlese "k".
2) Calcúlense $P(X > 50)$, $P(X < 50)$, $P(X = 50)$, $P(25 \le X \le 75)$, $P(X = \text{impar})$.

2.2.7 Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Considere que $P(A) = 0'7$ y que el experimento se repite 5 veces.

1) Calcúlese la probabilidad de que el suceso "A" ocurra 3 veces.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que ocurre "A" si el experimento se repite 5 veces.
3) Calcúlense $P(2 < X \leq 4)$ y $P(X \leq 1)$.
4) Calcúlense $P(X \geq 4 / X > 2)$ y $P(X \geq 2 / X \leq 4)$.

2.2.8 Un agente de seguros vende pólizas a 5 individuos, todos con 40 años de edad. Según las tablas actuariales vigentes, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es $0'6$. Calcúlese la probabilidad de que dentro de 30 años vivan los 5, vivan al menos 3, vivan 2, viva al menos 1, vivan no más de tres, vivan no más de 4.

2.2.9 Un juego de feria consiste en lanzar un dado equilibrado que en sus caras tiene dos ases y cuatro reyes. El dado se lanza cuatro veces y si al menos se obtienen tres reyes se gana una muñeca Chichona.

1) Calcúlese la probabilidad de ganar la muñeca.
2) Si juegan tres personas con las mismas reglas, una después de otra, calcúlese la probabilidad de que ganen dos de ellas, la probabilidad de que ganen al menos dos de ellas y la probabilidad de que gane al menos una.

2.2.10 La probabilidad de que un individuo tenga nivel de renta bajo es $0'5$, la probabilidad de que tenga nivel de renta medio es $0'3$ y la probabilidad de que tenga nivel de renta alto es $0'2$. Si se seleccionan al azar 5 individuos, calcule:

1) Probabilidad de que los cinco tengan nivel de renta bajo.
2) Probabilidad de que al menos cuatro no tengan nivel de renta bajo.
3) Probabilidad de que a lo sumo tres no tengan nivel de renta alto.
4) Probabilidad de que tres tengan nivel de renta medio.
5) Probabilidad de que no más de tres tengan nivel de renta medio.

2.2.11 Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si $P(A) = 0'07$ y el experimento se repite hasta que ocurre "A" por primera vez.

1) Calcúlese la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe repetirse el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez.
3) Calcúlense $P(4 \leq X < 7)$ y $P(X \geq 3)$.
4) Calcúlense $P(X \geq 5 / X > 3)$ y $P(X \geq 3 / X \leq 4)$.

2.2.12 Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si $P(A) = 0'8$, ¿cuál es el número mínimo de veces que debe repetirse el experimento para que sea mayor que $0'99$ la probabilidad de que "A" suceda al menos una vez?

2.2.13 En un proceso de control de calidad de un cierto tipo de piezas se procede a la rotura sucesiva de piezas para comprobar su resistencia. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $0'1$, y cada pieza cuesta 50 $. El proceso de control se detiene cuando se encuentra la primera pieza defectuosa.

1) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de piezas que se rompen durante el proceso.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "Z" que expresa el número de piezas no defectuosas que se rompen durante el proceso.
3) Determínese la probabilidad de que el coste del proceso sea superior a 200 $.

2.2.14 Sea E un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si $P(A) = 0'07$ y el experimento se repite hasta que ocurre "A" por 3ª vez, se pide:

1) Calcúlese la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que se debe repetir el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez.

2.2.15 Se sabe que en un grupo de 200 estudiantes de bachiller la proporción de pardillos matemáticos es del 90 % y se seleccionan 18 estudiantes.

1) Calcúlese la probabilidad de que entre los 18 seleccionados haya 16 pardillos matemáticos.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de pardillos matemáticos entre los 18 seleccionados.
3) Calcúlese la probabilidad de que el número de pardillos sea superior a 16.

2.2.16 Compruébese que, para todo valor positivo del parámetro real λ, la siguiente función es la de probabilidad de una variable aleatoria "X":

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, ...$$

2.2.17 De una baraja española de 40 cartas se seleccionan al azar 5 cartas. Determínese la función de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número de oros entre las 5 cartas, tanto si la selección se hace sin reposición como si se hace con reposición.

2.2.18 Estúdiese si son independientes dos sucesos "A" y "B" tales que

$$A \cup B = \Omega \; ; \; P(A) = 0'7 \; ; P(B) = 0'5$$

Sean I_A e I_B funciones indicadoras asociadas a esos sucesos:

$$I_A = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases} \; ; \; I_B = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin B \\ 1 \text{ si } x \in B \end{cases}$$

Determine la función de distribución de la variable $Z = I_A + I_B$.

2.2.19 Determínense los posibles valores de "p" y "c" para que la siguiente función pueda ser la de cuantía de una variable aleatoria "X".

$$f(x) = P(X = x) = c.(1-p)^{x-1}, \; x = 1,2,3, ...$$

Calcúlese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.

2.2.20 Sea "X" una variable aleatoria tal que $P(X = x) = 1/2^x$, $x = 1,2,3, ...$

1) Pruébese que es una distribución de probabilidad.
2) Determínese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.
3) Determínese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 3 y $P(X > 4)$.

2.2.21 Si una moneda se lanza "k" veces $(k \geq 2)$ y se ha obtenido al menos una cara, calcúlese la probabilidad de haber obtenido al menos una cruz.

2.2.22 La función de cuantía de la variable aleatoria que expresa el número de piezas que produce una máquina es

$$P(X = 0) = \frac{1}{3} \; ; \; P(X = x) = \frac{1}{3.2^{x-1}} \, , \; x = 1,2,3, ...$$

La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 1/5, y las piezas se fabrican de modo independiente.

1) Calcúlese la probabilidad de que no se produzca ninguna pieza defectuosa.
2) Calcúlese la probabilidad de producir dos o más piezas defectuosas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa.
3) Calcúlese la probabilidad de producir dos piezas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa.

2.2.23 Un artículo está formado por dos piezas. Cada pieza puede presentar, independientemente de las demás, defecto tipo "A" o tipo "B", o no presentar defecto, con probabilidades respectivas "p", "q" y "r". Al final de cada mes se extrae una muestra y en función de los defectos se clasifican los productos en cuatro categorías: "excelente", si el producto no tiene ningún defecto; "bueno", si tiene sólo defecto "A"; "regular", si tiene sólo defecto "B", y "malo" si tiene los dos defectos. Determine la distribución de probabilidad de la "calidad del producto".

2.4.1 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los funcionarios públicos es:

$$f(x)=\begin{cases} k.x^2 & \text{si } x\in[2;5] \\ 0 & \text{si } x\notin[2;5] \end{cases}$$

1) Determínese "k".
2) Calcúlese la función de distribución de "X".
3) Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos

$$\text{a) } X\geq 3 \;;\; \text{b) } X\geq 4 \;;\; \text{c) } 3\leq X\leq 4 \;;\; \text{d) } X\geq 3 / X\leq 4$$

2.4.2 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el beneficio diario de una empresa es:

$$f(x)=\begin{cases} k.(4+x) & \text{si } x\in[-4;0] \\ k.(4-x) & \text{si } x\in(0;4] \\ 0 & \text{si } x\notin[-4;4] \end{cases}$$

1) Determínese "k" y la función de distribución de "X".
2) Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos

$$\text{a) } X\geq 3 \;;\; \text{b) } X\leq 2 \;;\; \text{c) } -1\leq X\leq 2 \;;\; \text{d) } X\leq 3 / X\geq -1$$

2.4.3 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x)=\begin{cases} k.x.e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Determínese "k", la función de distribución de "X" y $P(2<X<3)$.

2.4.4 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el tiempo (en segundos) que dura una tarta de fresa y chocolate a la puerta de un colegio es $f(x)=0'2.e^{-x/5}$, $x>0$.

1) Determínese la función de distribución de "X" y la probabilidad de que la tarta dure más de 3 segundos.
2) Si la tarta ya ha durado más de 6 segundos, calcúlese la probabilidad de que dure más de 9 segundos.

2.4.5 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la resistencia de un tipo de vigas es

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)/8 & \text{si } x\in[1;5] \\ 0 & \text{si } x\notin[1;5] \end{cases}$$

1) Calcúlese la probabilidad de que la resistencia de una viga sea superior a 4.
2) Si se seleccionan seis vigas al azar, calcúlese la probabilidad de que la resistencia de al menos tres de ellas sea superior a 4.
3) Una viga es defectuosa si tiene resistencia inferior a 2. Si en un control de calidad se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 3 vigas.
4) Si se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la cuarta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 10 vigas.

2.4.6 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el peso de un tipo de piezas es

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \in [1;5] \\ 0 & \text{si } x \notin [1;5] \end{cases}$$

1) Calcúlese "k", la función de distribución y la probabilidad de que el peso de una pieza sea no superior a 4.
2) Si se seleccionan ocho piezas al azar, calcúlese la probabilidad de haya alguna con peso no inferior a $2'5$.
3) Una pieza se considera defectuosa si su peso es superior a $4'5$. Si se eligen piezas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 5 piezas.
4) Si se inspeccionan piezas al azar hasta encontrar la sexta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen menos de 10 piezas.

2.4.7 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x) = \begin{cases} k.x^2.(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Determínese "k".
2) Determínese la función de distribución de "X" y $P(X > 0'7)$.

2.4.8 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad x \in \Re$$

1) Determínese "k".
2) Determínese la función de distribución de "X" y $P(1/3 < X^2 < 1)$.

2.4.9 Sea $F: \Re \mapsto \Re$ tal que $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2.x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) Estúdiese si "F" es una función de distribución y analícese a qué tipo de variable aleatoria "X" corresponde. Determínese la densidad correspondiente a "F".
2) Calcúlense $P(X > 2)$ y $P(-3 < X < 4)$.

2.4.10 Sea la función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (4+x)/8 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Estúdiese a qué tipo de variable corresponde.

2.4.11 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{a}.\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \quad -a < x < a, \ a > 0$$

1) Determínese su función de distribución.
2) Calcúlense $P(X > 0)$ y $P(X < a/2)$.

2.4.12 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases} x/25 & \text{si } 0<x\le 5 \\ (10-x)/25 & \text{si } 5<x\le 10 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Determínese su función de distribución.
2) Calcúlense $P(X>5)$ y $P(5<X\le 7)$.

2.4.13 Una empresa cervecera ha estimado que la demanda diaria de sus clientes está expresada por la variable aleatoria "X". ¿Qué cantidad deberá tener disponible cada día para satisfacer la demanda con probabilidad 0'9 si la densidad de "X" es $f(x)=x/2,\ 0\le x\le 2$.

2.4.14 Sea "X" una variable aleatoria con densidad $f(x)=\begin{cases} b.e^{-a.x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

1) Determínese la relación entre "a" y "b".
2) Siendo $a=3$, calcúlense $P(X>3)$, $P(1<X<2)$ y $P(X<1)$.
3) Siendo $a=3$, determínese "c" de modo que $P(X>c)=0'9$.

2.4.15 Sea la función $f(x)=e^{-x}/(1+e^{-x})^2$. Demuéstrese que cumple todas las condiciones para ser una función de densidad de probabilidad. Calcúlese su función de distribución asociada.

2.4.16 Sea la función $F(x)=1-(1/x)$ si $x>1$ (0 en el resto). ¿Puede ser "F" la función de distribución de una variable aleatoria?

2.7.1 Calcúlese la varianza de las variables aleatorias "X" y "Z" cuyas respectivas funciones de probabilidad son:

x	1	2	3	4	5
f(x)	0'1	0'2	0'4	0'2	0'1

;

z	1	2	3	4	5
f(z)	0'2	0'2	0'2	0'2	0'2

Calcúlese la varianza de las variables aleatorias $U = 3 - 4.X$ y $W = 5 + 6.Z$

2.7.2 La función de probabilidad o cuantía de la variable aleatoria "X" que expresa el ingreso diario (en miles de dólares) de una empresa es

x	−1	2	4
f(x) = P(X = x)	0'3	0'5	0'2

1) Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen.
2) Si el beneficio diario es $Y = -0'5 + (X/4)$, calcúlese el beneficio medio diario.

2.7.3 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los ciudadanos (en decenas de miles de dólares) de un país es

$$f(x) = \begin{cases} 2.x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$$

1) Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen.
2) Si el aleatorio ahorro es $Y = X/5$, calcular el ahorro medio y la probabilidad de que el ahorro de un ciudadano supere el ahorro medio.

2.7.4 Calcúlese la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = 6.x.(1-x)$, $x \in [0;1]$. Calcúlese la varianza de las variables aleatorias $U = -7 - 9.X$ y $W = 5 - 3.X$

2.7.5 Calcúlese la varianza de "X" si su densidad es $f(x) = 1/(b-a)$, $x \in [a;b]$.

2.7.6 Un individuo va tres veces al día a una oficina ubicada en una zona en que no se puede aparcar. Puede elegir entre las siguientes normas de conducta:

a) Aparcar en sitio prohibido, en cuyo caso le pueden multar con 50 $.
b) Llevar el coche a un aparcamiento que le cuesta 35 $ cada vez.

1) Si la probabilidad de ser multado es 0'5, ¿cuál es la conducta con menor coste esperado?
2) Determínese la cuantía de la multa para que el coste esperado sea el mismo tanto si se aparca en sitio prohibido como si se usa el aparcamiento.

2.7.7 Sea "X" una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ (4 + x^2)/8 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Represéntese $F(x)$ y coméntese. Determínese la media de "X".

2.7.8 La variable aleatoria "X" está definida en los intervalos $(0;1)$ y $(3;4)$ y en el punto $x = 2$, siendo $P(0 < X \le 1) = 0'2$ y $P(X = 2) = 0'1$. En el intervalo $(0;1)$ la densidad es constante, y en el intervalo $(3;4)$ es una recta de pendiente positiva. Determine la función de distribución de "X" si $E(X) = 1157/420$.

2.7.9 Siendo los costes fijos igual a la unidad, la función de distribución de la variable aleatoria "X" que expresa el coste total de una empresa es

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } 1\le x\le 2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1) Determínese la función de densidad de los costes variables.
2) Determínese el coste variable esperado.
3) Determínese la probabilidad de que el coste variable sea superior a 1'3.
4) Determínese la probabilidad de que el coste variable esté entre 0'3 y 0'7.

2.7.10 Sea "X" una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases} 0'4 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 0'05 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ k & \text{si } 8\le x\le 12 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Determínese la función de distribución.
2) Calcúlese $P(3<X\le 10)$ utilizando la función de densidad.
3) Determínese $E(X^{2'5})$.

2.7.11 Calcúlense la media y la varianza de la variable "X" cuya función de densidad de probabilidad es $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-x^2/2}$, $x\in\Re$ -

2.7.12 Calcúlense $E(X)$ y $V(X)$ si la función de densidad de "X" es

$$f(x)=\frac{1}{b.\sqrt{2.\pi}}.e^{-(x-a)^2/2.b^2},\quad x\in\Re,\ b>0$$

2.7.13 Calcúlense la media y la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x)=\frac{a^n}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-a.x},\quad x>0,\ a>0,\ n>0$$

2.7.14 Calcúlense la media y la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x)=\frac{1}{\beta(p;q)}.x^{p-1}.(1-x)^{q-1},\quad 0<x<1,\ p>0,\ q>0$$

2.7.15 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el gasto mensual (en millones de euros) de una empresa es

$$f(x)=k.(x-x^2),\quad 0<x<1$$

1) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior al gasto medio.
2) Calcúlese la varianza del gasto.
3) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea de 400000 euros.
4) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior a 700000 euros.
5) Calcúlense la media y la varianza de $Z=9-3.X$

2.7.16 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la demanda mensual de ilusiones es $f(x) = k.x,\ 0 \le x \le 4$.
Determínense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

2.7.17 La función de cuantía de la variable aleatoria "X" es

x	-1	2	4	7	11	15	20
$f(x) = P(X = x)$	$0'05$	$0'2$	$0'2$	$0'15$	$0'1$	$0'1$	$0'2$

Determínense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

2.7.18 La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los ciudadanos (en decenas de miles de dólares) es

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in [1;2] \\ 3 - x & \text{si } x \in [2;3] \end{cases}$$

1) Calcúlese la probabilidad de que la renta no sea inferior a 25000 \$.
2) Determínese la renta que no superan el 35 % de los ciudadanos, y la que no superan el 65 %.

2.7.19 La función de densidad de la demanda "X" de escabondrios es

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } x \in [0;4] \\ (12 - x)/64 & \text{si } x \in (4;12] \end{cases}$$

El beneficio "U" depende de la demanda: $U = \begin{cases} -5 & \text{si } X < 2 \\ 5 & \text{si } 2 \le X < 4 \\ 10 & \text{si } 4 \le X < 8 \\ 15 & \text{si } 8 \le X \le 12 \end{cases}$

1) Determínese la demanda esperada.
2) Determínese el beneficio esperado y la varianza del beneficio.

2.7.20 El momento factorial de una variable aleatoria "X" se denota $m(k)$, siendo $m(k) = E\big(X.(X-1).(X-2).....(X-k+1)\big)$.
1) Determínese una expresión de $V(X)$ en función de los momentos factoriales.
2) Si $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ y $m(3) = 1$, halle el coeficiente de asimetría de "X".

2.7.21 Determínese el momento de orden 4 de la variable aleatoria "X" respecto de su media si $E(X^k) = 2.k,\ k = 1,2,3,4$.

2.7.22 Determínense $E(X)$ y $V(X)$ si la función de cuantía de "X" es

$$P(X = x) = p.q^{x-1}\ ;\ p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1,\ x = 1,2,3,....$$

2.7.23 La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria "X" que sólo toma valores en el intervalo $[0;1]$ es proporcional a $m.x + n$.
Determínense "m" y "n" sabiendo que $E(X) = 4/7$ y $E(X^2) = 17/42$.

2.7.24 Siendo "X" y "Z" variables aleatorias tales que $Z = a + b.X$, demuéstrese que tienen los mismos coeficientes de asimetría y de curtosis.

2.10.1 Si de la variable aleatoria "X" que expresa el número mensual de bostezos de un bípedo implume se sabe que tiene media 80 y varianza 25, determínese la probabilidad de los siguientes sucesos:

01) $76 < X < 84$	02) $X \notin (77;83)$	03) $65 < X < 95$
04) $X \notin (70;90)$	05) $55 < X < 98$	06) $70 < X < 95$
07) $X < 97$	08) $X > 90$	09) $X > 65$
10) $X < 69$	11) $66 \leq X \leq 94$	12) $57 \leq X \leq 99$
13) $65 \leq X \leq 99$	14) $\lvert X - 80 \rvert \geq 20$	15) $X \notin (50;99)$
16) $66 < X \leq 94$	17) $60 < X < 70$	18) $86 < X < 95$

2.10.2 El número de clientes que entran al día en un almacén tiene media 20 y desviación típica 2. Determínese una cota inferior para la probabilidad de que:

1) El número de clientes esté entre 16 y 24, ambos exclusive.
2) El número de clientes esté entre 17 y 24, ambos inclusive.
3) Entren menos de 25 clientes.

2.10.3 Sea "X" una variable aleatoria con media 0 y varianza σ^2. Sea $Y = a.X$, siendo $a > 0$. Pruébese que $P(\lvert Y \rvert > h) \leq a^2.\sigma^2/h^2$.

Imponiendo las condiciones que se consideren oportunas, demuéstrese que dadas las variables "X" y $g(X)$, es $P(g(X) < k) \geq 1 - E(g(X))$.

Sean μ y σ^2 la media y la varianza de la variable "X" cuya función de densidad es $f(x) = x^2/243$, $x \in [0;9]$. Determínese $P(\mu - 2.\sigma \leq X \leq \mu + 2.\sigma)$ y compá-rese el resultado con la cota de Tchebychef.

2.10.4 En una Universidad en la que sólo hay estudiantes de Derecho y de Economía, se sabe que el 60 % estudian Economía. Se sabe que el 25 % de los estudiantes de Derecho terminan la Carrera. Sabiendo que la probabilidad de terminar una Carrera en esa Universidad es 0'19, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha terminado sea de Economía?
Si el número medio de estudiantes que acuden a un examen es 300, con varianza 100, ¿cuál es el número de sillas necesario para poder asegurar que todos los asistentes podrán sentarse con una probabilidad no menor de 0'75?

2.11.1 Si en una moneda la probabilidad de obtener cara es "p", determínese la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe lanzarse una moneda hasta obtener una cara. Utilícese la función generatriz de momentos para calcular la media y la varianza de "X".
Determínese la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "Z" que expresa el número cruces que se obtienen hasta obtener una cara. Calcúlense la media y la varianza de "Z".
Determínese la función generatriz de momentos de $U = a + b.X$.

2.11.2 Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Determínese el k-ésimo momento respecto al origen.
2) A partir de la función generatriz de momentos, determínese el k-ésimo momento respecto al origen.

2.11.3 Sea "X" la variable aleatoria con densidad $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.
1) Determínese el k-ésimo momento respecto al origen.
2) Determínese $E(X^k)$ a partir de la función generatriz de momentos.

2.11.4 Sea "X" la variable aleatoria tal que $P(X = 0) = 1/3$ y $P(X = 1) = 2/3$.
Determínese $E(X^k)$ a partir de la función generatriz de momentos.

2.11.5 Determínese la función generatriz de momentos de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad es $f(x) = 2.\cos 2.x$, $x \in [0; \pi/4]$.

2.11.6 Sea "X" la variable aleatoria con densidad $f(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|}$, $x \in \Re$.
Determínense la función generatriz de momentos, la media y la varianza.

2.11.7 Sea "X" la variable con densidad $f(x) = \frac{\theta}{2}.e^{-\theta.|x-k|}$, $x \in \Re$, $\theta > 0$.
Calcule su función generatriz de momentos, $E(X)$ y el coeficiente de asimetría.

2.11.8 Sea "X" la variable cuya densidad es $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.
Determine la f.g.m. de $Z = X - E(X)$.

2.11.9 Calcúlese la varianza de "X" si su f.g.m. es $\Phi_X(t) = (0'8 + 0'2.e^t)^4$.
Determínese la función generatriz de momentos de $Z = a + b.X$.

2.11.10 Determínese la función generatriz de momentos de la variable aleatoria "X" que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = 0) = 0'2 \; ; \; P(X = 1) = 0'3 \; ; \; f(x) = 0'1, \; x \in [2; 7]$$

2.11.11 Una empresa fabrica un producto que comercializa sólo en España. La función de densidad de la variable aleatoria "X" que expresa la demanda mensual (en miles de unidades) es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

1) ¿Cuál ha de ser la cantidad producida para que se satisfaga la demanda con probabilidad 0'9?
2) Si un mes la demanda ha sido superior a 800 unidades, calcúlese la probabilidad de haya sido superior a 1500 unidades.
3) Determínese la función generatriz de momentos de "X".
4) Determínese la probabilidad de que la demanda difiera de su media es más de 200 unidades. Compárese el resultado con el obtenido mediante la acotación de Tchebychef.
5) Determine el valor esperado de la demanda total si la empresa decide exportar y la función generatriz de momentos de la demanda en el extranjero (también mensual y en miles de unidades) es

$$\Phi(t) = \frac{1}{6}.e^{t} + \frac{1}{3}.e^{2.t} + \frac{1}{2}.e^{3.t}$$

2.12.1 Siendo $0<p<1$, sea "X" la variable cuya función de cuantía es

x	0	1
P(X = x)	1 − p	p

1) Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular la media y la varianza de "X".
2) Determínese la función característica de la variable $U = a + b.X$.

2.12.2 Siendo $0<p<1$ y $q=1-p$, sea "X" la variable cuya cuantía es

$$P(X=x)=\binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x} \quad ; x=0,1,\ldots,n$$

Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular $E(X)$.

2.12.3 Sea $\theta>0$ y "X" con cuantía $P(X=x)=\dfrac{e^{-\theta}.\theta^{x}}{x!}$; $x=0,1,2,\ldots$

Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular $E(X)$.

2.12.4 Siendo $f(x)$ la densidad de "X", determínese la función característica.

$$1)\ f(x)=\frac{1}{b-a},\ a<x<b\ ;\ 2)\ f(x)=\frac{a^{k}}{\Gamma(k)}.x^{k-1}.e^{-a.x},\ x>0,\ a>0,\ k>0$$

2.12.5 Siendo $f(x)$ la densidad de "X", determínese la función característica:

$$1)\ f(x)=x/2,\ 0\le x\le 2\ ;\ 2)\ f(x)=e^{-x},\ x>0$$

2.12.6 Determínese la función característica de la variable aleatoria "X" que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X=0)=0'2\ ;\ P(X=1)=0'3\ ;\ f(x)=0'1,\ x\in[2;7]$$

2.13.1 Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = 3 + 2.X$ si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}, \ x = 0,1,2, ...$$

2.13.2 Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X^2$ si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

x	−2	−1	0	1	2
P(X = x)	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

2.13.3 Determínese la función de probabilidad de la variable $Z = \text{sen}\,(\pi.X/2)$ y su espe-ranza si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$P(X = x) = 2^{-(x+1)}, \ x = 0,1,2, ...$$

2.13.4 La densidad de probabilidad de la variable "X" es $f(x) = 1, \ x \in (0;1)$. Determínese la densidad de probabilidad de la variable $Z = e^X$.

2.13.5 La densidad de probabilidad de la variable "X" es $f(x) = 1, \ x \in (0;1)$. Determínese la densidad de probabilidad de la variable $U = \text{Ln}\ X$.

2.13.6 La densidad de la variable "X" es $f(x) = 2 - 2.x, \ x \in (0;1)$. Determínese la densidad de probabilidad de las variables $Z = 1 - X$ y $U = 1/X$.

2.13.7 Determínese la función de densidad de la variable $Z = X^2$ si la variable "X" tiene distribución $N(0;1)$; es decir, si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-x^2/2}, \ x \in \Re$$

2.13.8 Determínese la función de distribución de la variable $U = (3.X - 1)^2$ si la función de densidad de probabilidad de la variable "X" es $f(x) = 2.x, \ x \in [0;1]$.

2.13.9 Determine la función de densidad de la variable aleatoria $Z = |X|$ si la función de densidad de la variable "X" es $f(x) = 1/3, \ x \in (-1;2)$.

2.13.10 Determínese la función de densidad de probabilidad de la variable $Z = e^{-X}$ si la función de densidad de probabilidad de "X" es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 3.x^2/14 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

2.13.11 Supuesta conocida la distribución de probabilidad de la variable "X", determínese la distribución de probabilidad de "Z" en los siguientes casos:

$$1)\ Z = \begin{cases} -1 & \text{si } X \le 0 \\ 1 & \text{si } X > 0 \end{cases}; \ 2)\ Z = \begin{cases} X & \text{si } X \ge 3 \\ 0 & \text{si } X < 3 \end{cases}; \ 3)\ Z = \begin{cases} X & \text{si } X \ge -1 \\ 0 & \text{si } X < -1 \end{cases}$$

2.13.12 La función de cuantía de la variable aleatoria "X" que expresa el número de obreros necesarios para concluir un cierto trabajo es

x	10	11	12	13	14
$P(X = x)$	0'2	0'3	0'3	0'1	0'1

El beneficio que se obtiene por el trabajo es $Z = 1000.(12 - X)$

1) Determínese la distribución de probabilidad de "Z".
2) Determínense la media y la varianza de "X" y de "Z".

2.13.13 La concentración de un reactivo empleado en un proceso químico es una variable aleatoria "X" cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 6.x.(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El beneficio asociado al proceso es $Z = 1 + 3.X$
1) Determínese el valor esperado de "Z".
2) Determínese la función de densidad de "Z".

2.13.14 La proporción de alcohol en un cierto compuesto es una variable aleatoria "X" cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 20.x^3.(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El precio "Z" de venta (por litro) y la demanda "Q" (expresada en litros) son respectivamente $Z = 500 + 1000.X$ y $Q = 5000/X$.
1) Determínese la función de densidad de la demanda.
2) Determínese el valor esperado de la venta total del compuesto.

2.13.15 Determínese la función de densidad de probabilidad de la variable $Z = X^2$ si la función de densidad de probabilidad de "X" es $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

2.13.16 Sea "X" una variable aleatoria con densidad $f(x) = 0'5$, $x \in [-1;1]$.
Determínese la función de densidad de $Z = 3.X^2 - 2$.

2.13.17 Sea "X" una variable aleatoria con densidad $f(x) = 0'5$, $x \in [-1;1]$.
Determínese la función de densidad de $U = 1 + X^3$.

2.13.18 Sea "X" una variable densidad $f(x) = x^2/81$, $x \in [-3;6]$.
Determínese la función de densidad de $U = X^2$.

2.13.19 La densidad de la variable "X" es $f(x) = 2 - 2.x$, $x \in (0;1)$.
Determínese la densidad $Z = 2.X + 3$ y la de $U = +\sqrt{X}$.

2.14.1 La renta de los ciudadanos está expresada por la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad $f(x) = x/8$, $x \in [0;4]$. Una empresa considera que sólo son clientes potenciales los de renta comprendida entre 1 y 3.

1) Determínese la media y la varianza de la renta de los clientes potenciales.

2) Calcúlese la probabilidad de que un cliente potencial tenga renta superior a 2.

2.14.2 Siendo "X" una variable aleatoria continua, determínense las funciones de distribución y de densidad de la variable truncada de "X" en el intervalo $(a;b)$.

Enunciados de los problemas resueltos en el libro

Tema 3: Variables bidimensionales

3.9.1 En un cierto tipo de familias, las variables "X" e "Y" expresan respectivamente el número cuartos de baño en su vivienda y el número de hijos. Radiografíese el fenómeno si la función de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional discreta $(X;Y)$ es $f(x;y) = k.x.y \;;\; x = 1,2 \;;\; y = 1,2,3$.

3.9.2 La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = k.x.y \;;\; x = 1,2,3 \,;\, y = 1,2,3$$

1) Determínese "k".
2) Determínense $P(1 \leq X \leq 2; Y \leq 2)$ y $F(2;4)$, siendo "F" la función de distribución de la variable $(X;Y)$.
3) Determínense las distribuciones marginales y las condicionadas.
4) ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.3 La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es

Y / X	−1	0	1	2
0	k	3.k	k	2.k
1	2.k	2.k	3.k	k
2	k	k	k	2.k

1) Determínese "k".
2) Siendo "F" la función de distribución de la variable aleatoria $(X;Y)$, calcúlense $P(0 \leq X < 2; 0 < Y < 2)$, $P(0 \leq X < 2; Y = 0)$ y $P(X \leq 0)$. .
3) Determínense las distribuciones marginales y las condicionadas.
4) Calcule $F(1'5;1)$.
5) Determínese la varianza de "X", la de "Y" y la de $X / Y = 2$
6) Determínese el coeficiente de correlación entre "X" e "Y".
7) Determínese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T", si $Z = 2.X - 3.Y$ y $T = 4.X + 5.Y$.
8) Calcúlense $P(0 < X \leq 2 / Y = 1)$, $P(0 < X \leq 2 / Y \leq 1)$ y $P(X < 2 / X = Y)$.

3.9.4 Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones de probabilidad son

x	0	1	2
$f_1(x) = P(X = x)$	0'16	0'48	0'36

y	3	4	5
$f_2(y) = P(Y = x)$	1/3	1/3	1/3

1) Determínese la función de distribución de $Z = X + Y$.
2) Calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$.
3) Determínese la función de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

3.9.5 Sea "Y" una variable aleatoria que puede tomar los valores 0 y -1, y "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

x	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	0'3	0'3	0'4

Siendo $Z = X - Y$, se sabe que:

$$P(Z = 2 / X = 1) = P(Z = 2 / X = 2) = 2/3 \ ; \ P(X = 3 / Y = 0) = 1/4$$

1) Determínese la función de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

2) Determínese la función de probabilidad de la variable $(X;Y)$.

3) Determínense la media y la varianza de la variable $Z / X = 1$.

3.9.6 Sea $(X;Z)$ una variable bidimensional cuya función de probabilidad es:

Z / X	0	1
0	a	b
1	c	d

Demuéstrese que si "X" y "Z" son incorreladas son independientes.

3.9.7 Sean "X" y "Z" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número de bolas rojas y bolas blancas que se obtienen al seleccionar dos bolas de una urna que contiene 2 bolas rojas, 2 blancas y 2 negras. Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

3.9.8 Se extraen 7 cartas de una baraja española de 40 cartas. Sean "X", "Y", "Z" y "T" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número espadas, bastos, figuras y cartas inferiores a 5 entre las siete cartas seleccionadas.

1) Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(X;Y)$.

2) Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(Z;T)$.

3.9.9 Se seleccionan al azar 13 individuos de un colectivo formado por 19 elefantes, 2 pulgas, 40 helicópteros, 32 ladrillos y 7 ferrines. Determínese la distribución de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número de elefantes, ladrillos y ferrines entre los 13 individuos seleccionados.

3.9.10 La función de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Z)$ es:

$$f(x;z) = k.(x + z) \ ; \ x = 1,2,3,4 \ ; \ z = 1,2,3$$

1) Determínese "k".

2) Determínense las distribuciones marginales de "X" y "Z".

3) Determínense las distribuciones condicionadas.

4) ¿Son independientes "X" y "Z"?

3.9.11 La variable "X" toma los valores -1, 0 y 1 de modo equiprobable, y $Z = X^2$. ¿Son independientes "X" y "Z"? Calcúlese el coeficiente de correlación.

3.9.12 La variable "X" toma los valores 0 y 1 de modo equiprobable, y la variable "Y" toma los valores 0 y 2 con probabilidades respectivas 1/3 y 2/3. Sabiendo que $P(X = 0; Y = 0) = a$, determínese la distribución de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Y)$ en función de los valores de "a". ¿Entre qué valores puede variar "a"?

3.9.13 La variables independientes "X" e "Y" toman los valores -1 y 1 de modo equi-probable. Estúdiese la independencia de "X" y "Z", siendo $Z = X.Y$.

3.9.14 De las variables aleatorias discretas "X" e "Y" se sabe que

$$P(X=1)=0'5\ ;\ P(Y=-1)=0'4$$
$$P(X=3;Y=1)=0'03\ ;\ P(X\le 2;Y=-1)=0'21$$

y	-1	0	1
$P(Y=y/X\le 2)$	0'28	0'40	0'32

También se sabe que la variable "X" sólo puede tomar los valores 1, 2 y 3.

1) Determínense las distribuciones de probabilidad de "X" e "Y".
2) Determínese la función de distribución de la variable $Y/X>2$.
3) Determínense $P(X\le 2;Y>0)$ y $P(X\le 2;Y\ge 0)$.

3.9.15 Siendo "Y" una variable que toma valores 0 y 1, sea X" una variable tal que:

x	0	1	2
$P(X=x)$	0'3	0'3	0'4

Si $Z = X - Y$, determínese la distribución de probabilidad de "Z" sabiendo que:

$$P(Z=0/X=0)=P(Z=0/X=1)=2/3\ ;\ P(X=2;Y=1)=0'25$$

3.9.16 Sean "X", "Y" y "Z" tres variables aleatorias, siendo independientes "X" y "Z". De la función de probabilidad de la variable $(X;Y)$ se sabe que:

Y/X	1	3	5	7
2			0'1	
4	0'1			0'06
6		0'025	0'05	0'1
	0'3	0'1	0'3	0'3

1) Calcúlese $P(X=1;Y=2)$ sabiendo que:

$$P\big((Y=2)\cup(Z=0)/X=1\big)=0'32\ ;\ P(Z=0)=0'15$$
$$P\big(Y=2/(X=1;Z=0)\big)=0'2$$

2) Sabiendo que $P(X+Y=5)=0'15$, determínese la distribución de "Y".

3.9.17 Considérese que se lanzan dos dados una vez y que la variable "X" expresa el resultado obtenido en el primer dado y la variable "Y" expresa el máximo de los dos resultados. Determínese la distribución de probabilidad de $(X;Y)$ y el valor esperado de "Y".

3.9.18 La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Z)$ es

$$f(x;z)=\frac{k}{2^{x+z}}\ ;\ x=0,1,2,.....\ ;\ z=0,1,2,.....$$

Determínese "k". Determínense las distribuciones marginales y las condicionadas.

3.9.19 Considérese que las variables "X" e "Y" expresan respectivamente la aleatoria renta y el aleatorio ahorro de los ciudadanos. Radiografíese el fenómeno si la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional continua $(X;Y)$ es $f(x;y) = k.x.y \;;\; y \leq x,\ x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

3.9.20 Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan el consumo y el ahorro de las familias, la función de densidad $(X;Y)$ es

$$f(x;y) = e^{-(x+y)} \;;\; x > 0,\ y > 0$$

1) Determínese la probabilidad de que en una familia el consumo y el ahorro sean inferiores a 1.
2) Elegidas tres familias al azar, determínese la probabilidad de que en al menos una de ellas el consumo y el ahorro sean inferiores a 1.

3.9.21 La función de densidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = k.x \;;\; y \leq x \leq 1,\ x + y \geq 1$$

Determínese $P(X \geq 3/4)$.

3.9.22 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = k.(x^2 + y^2) \;;\; -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$$

Determine "k" y calcule $P(X \geq Y)$, $P(X^2 + Y^2 \leq 2)$ y $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

3.9.23 La función de distribución de la variable $(X;Y)$ es:

$$F(x;y) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y} \;;\; x \geq 0,\ y \geq 0$$

1) Calcule $P(X \leq 2; Y \leq 1)$ y las funciones de distribución marginales.
2) ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcule $E(X)$ y $E(Y)$.

3.9.24 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = k.x.y \;;\; 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1$$

Determínense las distribuciones marginales. ¿Son independientes X" e "Y"?

3.9.25 Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan la aleatoria producción de escabondrios y de ferritos de una empresa, la función de densidad de $(X;Y)$ es $f(x;y) = 2.x.y \;;\; 0 < x \leq 2,\ 0 < y \leq x/2$.

1) ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcule $P(X < 1)$.
2) Si la producción de escabondrios es $1/2$, determine la probabilidad de que la producción de ferritos sea inferior a 0'2.
3) Si la producción de escabondrios es 1, ¿cuál es la producción esperada de ferritos? Calcúlese la probabilidad de que la producción total sea inferior a 1.

3.9.26 Sean "X" e "Y" tales que $E(X) = 3$, $E(Y) = 1$, $V(X) = 4$ y $V(Y) = 9$.
Siendo $Z = 5.X - 4.Y + 15$, calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$ en los siguientes casos:

1) Las variables "X" e "Y" son independientes.
2) Las variables "X" e "Y" son incorreladas.
3) El coeficiente de correlación entre "X" e "Y" es 0'25.

3.9.27 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=\begin{cases} k_1.x.y & \text{si } 0<x\le 1, 1<y\le 2 \\ k_2.x & \text{si } 0<x\le 1, 2<y\le 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Además, se sabe que $F(2;2)=3/4$. Halle k_1 y k_2. Halle la función de distribución de "Y", E(Y) y V(Y). ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.28 Una empresa produce dos tipos de compuestos químicos, y en un estudio se ha llegado a la conclusión de que las cantidades producidas (en toneladas) en un día de cada compuesto son variables aleatorias cuya densidad es:

$$f(x;y)=\begin{cases} (x+2.y)/8 & \text{si } 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, 0<2.y\le x+2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde "X" expresa el número de toneladas producidas en un día del primer compuesto, e "Y" lo mismo para el segundo compuesto.

1) Determínese la producción diaria media del segundo compuesto.
2) Halle la probabilidad de no producir más de $1'5$ toneladas de cada compuesto.
3) Si por problemas técnicos no se pudiese producir más de una tonelada al día del segundo compuesto, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad producida del primer compuesto sea superior a la del segundo compuesto?

3.9.29 Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional cuya densidad es

$$f(x;y)=\begin{cases} 2.x & \text{si } 0<x\le 1/2, 0<y<1 \\ (4-2.x)/3 & \text{si } 1/2<x\le 2, 0<y<1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Calcúlese el valor de la función de distribución en el punto (1;1/2).
2) Determínese la función de densidad de "X" y su esperanza.
3) Calcúlese la mediana de "X".
4) Calcúlese la covarianza entre "X" e "Y".
5) Calcúlese la distribución de $Y / X = x$.
6) ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.30 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=3.(x^2+y^2)/8 \; ; \; -1\le x\le 1, \; -1\le y\le 1$$

¿Son independientes "X" e "Y"? Calcule $V(X+Y)$ y $P(X>0'5 / Y\le 0)$.

3.9.31 Sea "X" el tiempo total (en horas) que un camión permanece en una estación de descarga e "Y" la parte de ese tiempo que permanece esperando en la cola antes de empezar a ser descargado. La función de densidad de $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=\begin{cases} \frac{1}{4}.e^{-x/2} & \text{si } 0<y<x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Halle las densidades marginales de "X" e "Y". Demuestre que la covarianza entre "X" e "Y" es 4. Si "Z" es el tiempo (en horas) que dura la operación de descarga en sí, ¿qué relación mantienen "Z", "X" e "Y"? Halle la E(Z) y V(Z).

3.9.32 Determínese la función de distribución de $(X;Y)$ si su densidad de probabilidad es $f(x;y)=k.(6-x-y)$; $x\in[0;2]$, $y\in[2;4]$.

3.9.33 Sea $(X;Y)$ una variable aleatoria bidimensional cuya densidad es:

$$f(x;y)=\begin{cases} k \ \text{si} \ |x|<2.y, \ 0\le y<1 \\ 0 \qquad \text{resto} \end{cases}$$

Determínense las funciones de densidad de las distribuciones marginales, la función de distribución de "Y" y $P(X<1;Y\le 2)$.

3.9.34 Sean "X", "Y" y "Z" variables aleatorias tales que:

$$V(X)=1 \ ; \ V(Y)=4 \ ; \ V(Z)=8$$
$$COV(X;Y)=1 \ ; \ COV(X;Z)=-1 \ ; \ COV(Y;Z)=2$$

Calcúlense $V(X+Y+Z)$ y $V(3.X-Y-2.Z+1)$.

3.9.35 Sean "X" e "Y" variables independientes, con varianzas finitas y ambas con la misma media.

1) Demuéstrese que $E\big((X-Y)^2\big)=V(X)+V(Y)$.

2) Calcúlense $V(X-Y)$ y $V(2.X-3.Y+1)$ si $V(X)=V(Y)=3$.

3.9.367 Sean "X" e "Y" variables aleatorias. Determínese una condición para que las variables $Z=X+Y$ y $T=X-Y$ sean incorreladas. Demuéstrese que si $V(X)=V(Y)$, es $\rho(X;Z)=\sqrt{(1+\rho(X;Y))/2}$.

3.9.37 Sean "X" e "Y" variables aleatorias y "a", "b", "c" y "d" constantes $(a\ne 0 \text{ y } c\ne 0)$. Sean las variables $Z=b+a.X$ y $T=d+c.Y$. Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y". Compruébese que $COV.(U;W)=\rho(X;Y)$, siendo "U" y "W" las respectivas variables tipificadas de "X" e "Y".

3.9.38 Sean "X" e "Y" variables aleatorias con la misma media y la misma varianza. Siendo constantes "a" y "b", sean $Z=a.X+b.Y$ y $T=a.X-b.Y$. Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y".

3.9.39 Siendo "X" e "Y" variables aleatorias independientes, demuéstrese que

$$V(X.Y)=V(X).V(Y)+V(X).(E(Y))^2+V(Y).(E(X))^2$$

3.9.40 Sea $F:\Re\mapsto\Re$ una función de distribución.

1) ¿Es $G(x;y)=F(x)+F(y)$ una función de distribución?

2) ¿Es $G(x;y)=\text{máx.}\{F(x),F(y)\}$ una función de distribución?

3) ¿Es $G(x;y)=F(x).F(y)$ una función de distribución?

3.10.1 La densidad de $(X;Y)$ es $f(x;y)=k.e^{-x};\ x>0,\ 2.x<y<4.x$
Analícese la independencia de "X" e "Y" y determínese $E(Y/X=x)$.

3.10.2 La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=k;\ 0<y\leq x<1$.

Determínense las distribuciones marginales.
Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.

3.10.3 La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=k;\ |y|<x,\ 0<x<1$.

1) Determínense las distribuciones marginales.
2) Compruébese que "X" e "Y" son incorreladas sin ser independientes.
4) Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.
5) Calcule $P(0<Y<0'3/X=0'5)$ y $P(X>0'7/Y=0'2)$.

3.10.4 La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=y;\ y\in[0;1],\ x\in[0;2]$.

1) Determínense las distribuciones marginales.
2) Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.

3.11.1 La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = x.y/2;\ 0 < y \le x < 2$.

1) Determínense las curvas de regresión $E(X / Y = y)$ y $E(Y / X = x)$.
2) Determínense las rectas de regresión mínimo cuadrática.
3) Determínense las varianzas residuales de "X" y de "Y".

3.12.1 La función de probabilidad la variable $(X;Y)$ es:

X / Y	0	1	2
0	0'1	0'2	0'2
1	0'2	0'2	0'1

1) Determínese la función generatriz de momentos de $(X;Y)$.
2) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" e "Y".
3) Calcúlese $COV.(X;Y)$ utilizando los resultados anteriores.
4) Calcúlese la función generatriz de momentos de la variable $(Z;U)$, siendo:

3.12.2 Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes tales que

$$P(X = x) = \frac{e^{-a}.a^x}{x!} \ ; \ x = 0,1,2, ... \quad ; \quad P(Y = y) = \frac{e^{-b}.b^y}{y!} \ ; \ y = 0,1,2, ...$$

1) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" y de "Y".
2) Determínense la esperanza y la varianza de "X" y de "Y".
3) Determínese la función generatriz de momentos de $Z = X + Y$.

3.12.3 Sea $\Phi_X(t) = (1 + e^{t^2/2})/2$ la función generatriz de momentos de una variable aleatoria "X". Sean $X_1, X_2, ... , X_n$ variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad que "X". Determínese la f.g.m. de $Z = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$, que es la media aritmética de $X_1, X_2, ... , X_n$.

3.12.4 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = 1 \ ; \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1$$

1) Determínese la función generatriz de momentos de $(X;Y)$.
2) Calcúlese la función generatriz de momentos de la variable $(Z;U)$, siendo:

$$Z = X + Y \ ; \ U = X - Y$$

3.12.5 La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Z)$ es:

$$f(x;z) = 1/2^{x+z} \ ; \ x = 1,2, ... \ ; \ z = 1,2, ...$$

1) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" y "Z".
2) Determínese la función generatriz de momentos de $(X;Z)$.
3) Determínese la función generatriz de momentos de $U = X + Z$.

3.12.6 Sean "X" e "Y" variables independientes y $Z = a.X + b.Y$, siendo constantes "a" y "b". Usando sólo el concepto de f.g.m. y sus propiedades, determínense los tres primeros momentos de la variable "Z" respecto al origen en función de los correspondientes momentos de las variables "X" e "Y".

3.12.7 Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones generatrices de momentos son:

$$\Phi_X(t) = 1 + t + \frac{3}{2}.t^2 + ... \quad ; \quad \Phi_Y(t) = 1 - t + \frac{5}{2}.t^2 + ...$$

Obténgase la matriz de covarianzas de la variable $(X;Y)$. Calcúlese la varianza de $Z = 2.X - 3.Y + 5$. Hasta los términos de orden 2 inclusive, determínese la f.g.m. de $W = X + Y$. ¿Puede ser $\Phi(t) = 1 + 8.t - \frac{1}{2}.t^2 + ...$ una f.g.m?

3.13.1 La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es

Y / X	−1	0	1
−2	1/6	1/12	1/6
1	1/6	1/12	1/6
2	1/12	0	1/12

Si $Z = |X|$ y $U = Y^2$, halle la distribución de probabilidad de $(Z;U)$ y las distribuciones marginales de "Z" y "U". Halle $P(Z=1/U=1)$ y $P(U=1/Z=1)$.

3.13.2 Sea $(X;Y)$ con densidad $f(x;y) = 2.x + y$; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

Determínese la función de densidad de $(Z;T)$ si $Z = X + Y$ y $T = X + 2.Y$.

3.13.3 Sea $(X;Y)$ con densidad $f(x;y) = 1$; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
1) Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.
2) Calcúlense las distribuciones marginales de "Z" y "T".

3.13.4 Sean "X" e "Y" dos variables aleatorias que representan respectivamente el precio de compra y el de venta de un determinado artículo. La función de densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = x/36$ si $0 < x < y < 6$. Determínese la esperanza del beneficio y la función de densidad de $X + Y$.

3.13.5 Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad $s(w) = e^{-w}$, $w > 0$.
1) Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X/Y$ y $T = X + Y$.
2) Calcúlense las distribuciones marginales de "Z" y "T".

3.13.6 Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de probabilidad $P(X = k) = P(Y = k) = e^{-a}.a^k/k!$, $k = 0,1,2,\ldots$.
Calcúlese la distribución de probabilidad de $Z = X + Y$.

3.13.7 Sea $(X;Y)$ con densidad $f(x;y) = \frac{3}{2}.x.y^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

Determínese la densidad de $W = X.Y$.

3.13.8 Sea $(X;Y)$ con densidad $f(x;y) = 1/4$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.
Determínese la densidad de $W = X + Y$.

3.13.9 Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas.
1) Determínese la función de distribución de $Z = \text{máx.}\{X,Y\}$.
2) Determínese la función de distribución de $T = \text{mín.}\{X,Y\}$.
3) Halle las densidades de "Z" y "T" si la densidad de "X" es $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

3.13.10 Sean "X" e "Y" independientes e idénticamente distribuidas.
1) Determínese la función de distribución de $Z = \text{máx.}\{2.X, 3.Y\}$.
2) Determínese la función de distribución de $T = \text{mín.}\{2.X, 3.Y\}$.
3) Halle las densidades de "Z" y "T" si la de "X" es $f(x) = 2.e^{-2.x}$, $x > 0$.

3.14.1 Siendo "X" la variable que expresa el aleatorio tiempo total que emplea un cliente de un banco en ser atendido, e "Y" la variable que expresa el aleatorio tiempo que debe esperar para ser atendido (tiempo de espera en cola), la función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = e^{-x} \; ; 0 < y < x$$

1) Determínese la función de distribución de $(X;Y)$.
2) Determínese la distribución de probabilidad del aleatorio tiempo que el cliente está siendo atendido (tiempo de servicio). ¿Son independientes el tiempo de espera en cola y el tiempo de servicio?

3.14.2 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas.

1) Determínese la distribución de $Z = \text{mín.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
2) Determínese la distribución de $T = \text{máx.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
3) Determínese la distribución del "recorrido" $R = T - Z$.
4) Particularícense los resultados si $n = 3$ y las variables X_i tienen distribución exponencial de parámetro "a"; o sea, si su función de densidad es

$$f(x) = a.e^{-a.x} \; ; x > 0, a > 0$$

3.14.3 La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es

$$f(x;y) = 3.x \; ; 0 < x < 1, y < x, y > 0$$

1) Determínese la distribución de probabilidad de $Z = (X+Y)/2$.
2) Determínese el primer cuartil de "Z".

3.14.4 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias (no necesariamente independientes ni con la misma distribución de probabilidad) cuyas respectivas funciones de cuantía/densidad dependen de un parámetro desconocido θ que toma valores en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \Re$, considérese que $T = T(X_1; \ldots; X_n)$ es una variable aleatoria unidimensional tal que $E(T) = h(\theta)$. Supuesto que los campos de variación de $X_1, \ldots, X_n$ no dependen de θ y que son legítimas todas las operaciones que deban hacerse, demuéstrese que

4.4.1 De una urna con 8 bolas blancas y 2 bolas rojas se extraen al azar 3 bolas con reposición.
1) Calcúlese la probabilidad de que 2 de las bolas extraídas sean blancas.
2) Calcúlese la probabilidad de que, como máximo, una sea blanca.
3) Calcúlese la probabilidad de que al menos dos sean blancas.
4) Calcúlese el beneficio esperado y la varianza del beneficio si cada bola blanca tiene un premio de 10 $ y cada bola roja una penalización de 20 $.

4.4.2 Un agente de seguros vende pólizas a 5 individuos, todos de la misma edad. Si la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es $0'6$, calcule la probabilidad de que dentro de 30 años vivan los 5, vivan al menos 3, vivan 2, viva al menos 1, vivan no más de tres, vivan no más de 4.

4.4.3 Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Considere que $P(A) = 0'7$ y que el experimento se repite 5 veces.
1) Halle la distribución de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de veces que ocurre "A", calculando la probabilidad de que "A" ocurra 3 veces.
2) Calcúlense $P(2 < X \leq 4)$, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 4 / X > 2)$ y $P(X \geq 2 / X \leq 4)$.

4.4.4 La longitud de un tipo de pieza se distribuye con función de densidad

$$f(x) = k.(x-1).(3-x) \;;\; x \in [1;3]$$

Una pieza es válida si su longitud está comprendida entre 1'7 y 2'4.
1) Calcúlese la probabilidad de que una pieza sea válida.
2) Las piezas se empaquetan en lotes de 5, y un lote se acepta si contiene menos de 2 piezas defectuosas. Calcúlese la probabilidad de que se rechace un lote.

4.4.5 Considérese un experimento dicotómico cuya probabilidad de éxito es 0'8. ¿Cuál es el número mínimo de veces que debe reptirse el experimento para que la probabilidad de obtener al menos un éxito sea superior a 0'99?

4.4.6 Un juego de feria consiste en lanzar un dado equilibrado que en sus caras tiene dos ases y cuatro reyes. El dado se lanza cuatro veces, y se gana la muñeca Chichona si se obtienen al menos tres reyes.
1) Calcúlese la probabilidad de ganar la muñeca.
2) Si juegan tres personas con las mismas reglas, una después de otra, calcúlese la probabilidad de que ganen dos de ellas, la probabilidad de que ganen al menos dos de ellas y la probabilidad de que gane al menos una.

4.4.7 La probabilidad de que un individuo tenga nivel de renta bajo es $0'5$, la probabilidad de que tenga nivel de renta medio es $0'3$ y la probabilidad de que tenga nivel de renta alto es $0'2$. Si se seleccionan al azar 5 individuos, calcular:
1) Probabilidad de que los cinco tengan nivel de renta bajo.
2)Probabilidad de que al menos cuatro no tengan nivel de renta bajo.
3) Probabilidad de que a lo sumo tres no tengan nivel de renta alto.
4) Probabilidad de que tres tengan nivel de renta medio.
5) Probabilidad de que no más de tres tengan nivel de renta medio.

4.4.8 En un experimento sobre germinación de una planta se siembran cuatro variedades (A, B, C y D), encontrándose las semillas en las siguientes proporciones: el 96 % de la variedad A, el 1 % de la B y el 1 % de la D. El poder de germinación (porcentaje de semillas que germinan sobre el total sembrado) es del 50 % para la variedad A, el 15 % en la B, una de cada 5 en la C y el 5 % en la D.

1) Determínese la probabilidad de que germine una semilla elegida al azar.
2) Si se han sembrado 2500 semillas, determínese la moda del aleatorio número de semillas que no germinan.

4.4.9 La función de densidad de probabilidad de la variable "X" que expresa la aleatoria duración (en años) de un componente eléctrico es

$$f(x)=\begin{cases} 2.x & \text{si } 0 \le x \le 0'5 \\ 1 & \text{si } 0'5 < x \le 1 \\ 3-2.x & \text{si } 1 \le x \le 1'5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Sólo son válidos los componentes cuya duración es superior a medio año.

1) Calcúlese la mediana y la varianza de "X".
2) Calcúlese la probabilidad de que un componente sea válido.
3) Si los componentes se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de rechazar un lote?

4.4.10 Sean "U" y "V" variables independientes con distribución $B(4;\theta)$. Si $T=\sqrt{U+V}$ y $Z=5.U+4.V$, determine la distribución de probabilidad de la variable $Z/T=\sqrt{3}$, su valor esperado y su varianza.

4.4.11 Una empresa elabora un artículo que puede ser defectuoso con probabilidad 0'2. El 60 % de los artículos se inspeccionan en el departamento de producción y el resto en el departamento de control de calidad.

En el primero hay tres inspectores que, de forma independiente entre sí, detectan defectos en artículos no defectuosos con probabilidades 0'15, 0'17 y 0'2 respectivamente, y detectan defectos en artículos defectuosos con probabilidades respectivas 0'75, 0'85 y 0'975.

1) Si para rechazar un artículo en el departamento de producción el defecto debe ser detectado por los tres inspectores, calcúlese la probabilidad de rechazar un artículo en ese departamento.
2) Si en el departamente de calidad un artículo se rechaza con probabilidad 0'45, calcúlese la probabilidad de que un artículo rechazado haya sido inspeccionado en ese departamento.
3) Cada una de las máquinas empleadas consta de 18 componentes. La probabilidad de que un componente falle durante un día es 0'05, con independencia de los demás componentes. Al final del día se detiene la máquina para ser inspeccionada por un técnico que repara todos los componentes defectuosos. Si el técnico necesita 4 horas para reparar un componente, calcúlese la probabilidad de que como máximo 16 horas después de la parada la máquina esté lista para funcionar.

4.4.12 Aunque se sabe que no es baja, la proporción "p" de pardillos en la Facultad de Economía no la conoce ni Aramís Fuster. Si se toma como valor aproximado de "p" la proporción de pardillos en una muestra de "n" estudiantes seleccionados al azar, halle un valor de "n" para poder asegurar que el error cometido al estimar "p" es menor que 0'1 con probabilidad no inferior a 0'99.

4.4.13 Los diamantes producidos en una mina se clasifican en cuatro calidades A, B, C y D, y por experiencia se sabe que las respectivas proporciones producidas de cada tipo son 0'2, 0'3, 0'4 y 0'1. Si se seleccionan al azar 30 diamantes y las variables "X", "Z", "T" y "U" expresan respectivamente el número de ellos que son de calidad A, B, C y D, determínese la distribución de probabilidad de las variables (X;Z) y (X;T;U).

4.5.1 El número medio de coches que llegan a una gasolinera cada hora es 240. Si la gasolinera puede atender un máximo de 10 coches/minuto, halle la probabilidad de que en un minuto lleguen más coches de los que pueden atender.

4.5.2 El número diario de llamadas telefónicas al servicio de averías de una empresa tiene distribución de Poisson de parámetro 4, y el número de llamadas al departamento de ventas de tiene distribución de Poisson de parámetro 6. Calcúlese la probabilidad de que un día se reciban al menos 8 llamadas en total.

4.5.3 Una aseguradora de coches tiene 370 clientes en un determinado año, 120 de los cuales tienen menos de 30 años. El número anual de accidentes de un conductor con menos de 30 años tiene distribución de Poisson de media 0'3, y para los individuos de 30 años o más tiene distribución de Poisson de media 0'02. Halle el número esperado de accidentes que se declararán ese año en la aseguradora. Si elegimos un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un sólo accidente a lo largo del año?. Si un individuo ha tenido más de un accidente durante el año, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 30 años o más?

4.5.4 Considerando que el año tiene 365 días, calcúlese la probabilidad de que como máximo 2 personas entre 500 cumplan años el día 17 de julio. La variable $X \approx P(\lambda)$ expresa el número de llamadas telefónicas que recibe una empresa diariamente. Si, con independencia de las demás, la probabilidad de que una llamada proceda del extranjero es "p", determínese la distribución de probabilidad de la variable "Y" que expresa el número del extranjero.

4.5.5 Si $X \approx P(\lambda)$ y $Z \approx P(\theta)$ son variables independientes, determínese la distribución de probabilidad de la variable $X / X + Z = n$.

4.5.6 Si $X \approx P(\theta)$, Halle su varianza si $P(X = 0) = 0'5$. Siendo $X \approx B(n;p)$ y considerando que "n" es fijo, ¿qué valor de "p" maximi-za la varianza de "X"?

4.5.7 Si $X \approx P(\lambda)$ y $Z / X = x$ tiene distribución $B(x;\theta)$, halle la distribución de probabilidad de "Z".

4.5.8 El dueño de un restaurante con 10 mesas sabe que de las personas que reservan mesa por teléfono sólo la mitad acude finalmente.

1) Si un día hay 17 reservas, determínese la probabilidad de que haya mesa para todas las personas que realmente acudan. ¿Qué número máximo de reservas deben admitirse para asegurar lo anterior con una confianza mínima del 90 %? En este apartado, considere que sólo se admiten clientes con reserva.
2) La hoja de reservas de hoy se ha perdido, y sólo se recuerda que que se hicieron 3; por ello se decide dar mesa a cualquier cliente que se presente. Sin embargo, se presentan 11 clientes y, en consecuencia, uno es rechazado, lo que se hace aleatoriamente. Si el cliente rechazado insiste en que él hizo su reserva, determínese la probabilidad de que esto sea cierto si se sabe que entre los presentados están efectivamente los tres con reserva.
3) El beneficio por cada persona que ocupa una mesa es 1000 si la mesa la ocupa una única persona, 800 si la ocupan dos y 500 si la ocupan tres o más. Si el número de comensales por mesa es $1 + X$, siendo "X" una variable de Poisson de parámetro 1'4, determínese el beneficio esperado por mesa.

4.5.9 Siendo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables de Poisson independientes, demuestre que la variable $X_1 / X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k$ es binomial.

4.5.10 Álvaro y Mario venden gafas. Con independencia uno de otro, el número de gafas que cada uno vende al día tiene distribución de Poisson de parámetro θ. Si el beneficio obtenido por cada venta es de 5 $ para Álvaro y 4 $ para Mario, halle el beneficio total esperado un día que venden 3 gafas en total.

4.5.11 Determine $E(1/(X+1))$, siendo X una variable de Poisson.

4.6.1 Una compañía aérea tiene aviones de dos motores y de cuatro motores. Para todos los aviones, la probabilidad de fallo en un motor es 0'1, con independencia de los restantes motores. Un vuelo sólo puede finalizar bien si al menos la mitad de los motores del avión funcionan correctamente.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo finalice bien si se realiza con un bimotor?, ¿y si realiza con un cuatrimotor?
2) Si en una determinada ruta se usan los bimotores el doble que los cuatrimotores, ¿qué proporción de vuelos de esa ruta finaliza bien?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer vuelo que no finaliza bien sea después del décimo?

4.6.2 Sean "X" y "Z" variables independientes con distribución geométrica de parámetros "a" y "b" respectivamente. Calcúlese:

$$1)\ P(X = Z)\ ;\ 2)\ P(X + Z = n)\ ;\ 3)\ P(X = m \,/\, X + Z = n)$$

4.6.3 En un proceso de control de calidad de un cierto tipo de piezas se procede a la rotura sucesiva de piezas para comprobar su resistencia. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $0'1$ y cada pieza cuesta 50 \$. El proceso de control se detiene cuando se encuentra la primera pieza defectuosa.

4) Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de piezas que se rompen durante el proceso.
5) Determínese la función de probabilidad de la variable "Z" que expresa el número de piezas no defectuosas que se rompen durante el proceso.
6) Determínese la probabilidad de que el coste del proceso sea superior a 200 \$.

4.6.4 Una empresa emplea cada día una de las dos pruebas siguientes para controlar la calidad de su producción: con el test "A" se examinan "n" piezas seleccionadas aleatoriamente, detectándose anomalía si se encuentran dos o más piezas defectuosas; y con el test "B" se examinan consecutivamente piezas elegidas al azar, detectándose anomalía (y deteniendo el test) si la primera pieza defectuosa encontrada tiene lugar en el examen de la k-ésima pieza o antes.

1) Si $n = k = 10$ y el porcentaje de piezas defectuosas un determinado día es bajo e igual al 1 %, calcúlese la probabilidad de que cada uno de los test funcione como sería deseable y no señale anomalía en la producción.
2) ¿Para qué valores de "n" y "k" se conseguiría que el respectivo test detectara anomalía con al menos un 60 % de probabilidad en el caso de que el porcentaje de piezas defectuosas sea alto e igual al 10 %?
3) La eficacia de un test se mide con la probabilidad de que tome la decisión adecuada en cada ocasión (detectar anomalía cuando el porcentaje de piezas defectuosas sea alto, y no detectarlas en caso contrario). Razónese si uno de los dos test es siempre más eficaz que el otro si se toma $n = k$.

Durante un periodo de tiempo la empresa decide aleatoriamente aplicar un test u otro cada día. La probabilidad de aplicar el test "A" un día es $0'8$, mientras que la de aplicar el test "B" es $0'2$. Siempre se aplican con los valores $n = k = 10$.

Para un día en que el porcentaje de defectuosas es del 1 %, se pide:

4) Calcular la probabilidad de que no se detecte anomalía.
5) Si se detecta anomalía, calcúlese la probabilidad de haber usado el test "B".
6) Calcúlese el número medio de piezas que se examinan cada día.

4.6.5 La probabilidad de producir una pieza defectuosa es "p". Para comprobar la calidad de un lote de piezas producidas, la sección de control de calidad examina como máximo 4 piezas. Si se observa entre éstas una pieza defectuosa, el lote se considera defectuoso. El control finaliza en el momento en que se encuentra una pieza defectuosa o si, después de examinar las 4 piezas, ninguna es defectuosa. En este último caso, el control se detiene y el lote se considera apto. Determínese la distribución de probabilidad del número de piezas examinadas en el proceso de control.

4.7.1 Tres inspectores, actuando cada uno a su aire, se encargan semanalmente del control de calidad de un tipo tuerca que es defectuosa con probabilidad 0'3. Dos de los inspectores terminan su tarea al encontrar la cuarta tuerca defectuosa, y el otro inspector finaliza su tarea al encontrar la sexta defectuosa. Si cada tuerca cuesta 2 $ y queda inservible tras su inspección, determínese la distribución de probabilidad del aleatorio coste del control de calidad y el coste esperado.

4.7.2 Un grupo de 10 amigos quiere entrar en un estadio con entradas falsas. Las entradas están bien falsificadas y a simple vista no se distinguen de las verdaderas. Sin embargo, si el portero las revisa, descubrirá seguro el engaño, impidiendo la entrada. El portero revisa el 20 % de las entradas, salvo cuando descubre en un mismo día 3 o más entradas falsas: a partir de la tercera falsa las revisa todas. Si los 10 amigos deciden entrar uno detrás de otro y son los primeros de la cola cuando se abren las puertas del estadio, halle la probabilidad de que sólo entren 6. El comité directivo del estadio sabe que el 10 % de las entradas son falsas. Si coloca un control magnético, este actúa rechazando como falsas las que realmente lo son con una probabilidad 0'85, y aceptando las verdaderas en el 90 % de los casos. Si una entrada pasa por el control dos veces, y éste la da por válida las dos veces, determínese la probabilidad de que sea falsa.

4.7.3 Una empresa lleva a cabo diariamente un control de calidad en dos fases. En la primera se realiza una inspección hasta encontrar en tercer artículo defectuoso. La segunda fase se detiene cuando aparece el primer artículo defectuoso. La probabilidad de que un artículo sea defectuoso es 0'1. Halle la probabilidad de inspeccionar 10 artículos en la primera fase. Halle la probabilidad de tener que inspeccionar al menos 6 artículos durante el proceso de control de calidad.

4.7.4 El sistema de producción de un objeto muy delicado es tal que, aunque siempre es corregido y revisado al empezar la jornada de trabajo, puede ser que a lo largo del día tenga que ser revisado y corregido otra vez, con la consiguiente parada en su funcionamiento. Debido a la revisión al principio del día, puede considerar que lo que pasa en una jornada es independiente de lo que pasa las restantes. Indique qué modelo de distribución sería adecuada para cada una de las siguientes variables:

1) La variable que expresa si a lo largo de un día el sistema se detiene o no.
2) La variable que expresa el número de días en que, a lo largo de una semana (de lunes a viernes), se detendrá el sistema.
3) La variable que expresa el número de semanas, a lo largo de las 52 que componen un año), en que no habrá que detener el sistema (suponga que todas las semanas se trabaja de lunes a viernes).
4) La variable que expresa el número total de días que transcurrirán hasta el día en que el sistema se detiene por primera vez.
5) La variable que expresa el número total de días que pasarán hasta que sean 10 las jornadas en las que haya habido que detener el sistema para revisión (cuente todos los días, tanto los 10 en que hay detención como aquellos en los que no).
6) En el contexto descrito en 5), y suponiendo que hoy es el sexto día en que ha habido que detener el sistema, la variable que expresa el número de días que restan hasta que se produzca la décima detención.

4.7.5 La función de densidad de probabilidad de la variable "W" que expresa el peso (en kilos) de un tipo de piezas es $f(w) = 0'1.e^{-0'1.w}$, $w > 0$.

1) Si se seleccionan 30 piezas, determínese la función de probabilidad de la variable X_1 que expresa el número de ellas con peso no superior a 10 kilos.
2) Si se seleccionan 20 piezas, determínese la función de probabilidad de la variable X_2 que expresa el número de ellas con peso superior a 11 kilos.
3) Si se inspeccionan piezas hasta encontrar la primera con peso superior a 12 kilos, determínese la función de probabilidad de la variable X_3 que expresa el número de piezas inspeccionadas.
4) Si se inspeccionan piezas hasta encontrar la primera con peso no superior a 7 kilos, determínese la función de probabilidad de la variable X_4 que expresa el número de piezas inspeccionadas.
5) Si se inspeccionan piezas hasta encontrar la cuarta con peso no superior a 8 kilos, determínese la función de probabilidad de la variable X_5 que expresa el número de piezas inspeccionadas.
6) Si se inspeccionan piezas hasta encontrar la quinta con peso superior a 13 kilos, determínese la función de probabilidad de la variable X_6 que expresa el número de piezas inspeccionadas.

4.7.6 Siendo "X" e "Y" variables independientes con distribución geométrica de parámetro "p", determínese la distribución de la variable $X / X + Y = n$.

4.7.7 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución geométrica de parámetro desconocido θ.

Siendo "T" la suma de $X_1, \ldots, X_n$, demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(X_1; \ldots; X_n) / T = t$ no depende de θ.

4.7.8 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución $BN(k;\theta)$, siendo conocido "k" y desconocido θ. Siendo "T" la suma de $X_1, \ldots, X_n$, demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(X_1; \ldots; X_n) / T = t$ no depende de θ.

4.7.9 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad, sea "Z" su media aritmética. Determínese la distribución de probabilidad de "Z" en los siguientes casos:

1) $X_i \approx B(\theta)$; 2) $X_i \approx B(k;\theta)$; 3) $X_i \approx P(\theta)$; 4) $X_i \approx G(\theta)$; 5) $X_i \approx BN(k;\theta)$

4.8.1 En una población de 100 individuos, el 8 % tiene la presión arterial elevada. Si se seleccionan 7 individuos, determínese la probabilidad de que no más de uno tenga la presión arterial elevada.

4.8.2 Un bote contiene 20 rotuladores, pero sólo escriben 12.

1) Si seleccionamos 10 rotuladores, ¿cuál es la probabilidad de que 7 de ellos escriban?
2) Si los rotuladores se seleccionan uno tras otro y el que no escribe va a la papelera, ¿cuál es la probabilidad de que cuando se encuentre el primero que escribe se hayan tirado 3 a la papelera?
3) ¿Cuántos rotuladores nuevos (que escriben) habrá que añadir a la configuración inicial del bote para que el primero que se elija escriba en el 75 % de los casos?
4) Por experiencia, se sabe que en una caja con 100 rotuladores hay una media de 15 rotuladores que no escriben, con desviación típica 4. Determínese una cota inferior para la probabilidad de que el número de rotuladores que no escriben esté entre 10 y 20.

4.8.3 Para controlar la calidad de un artículo fabricado por una máquina se inspecciona diariamente el 5 % de la producción. Un día, la máquina sufre una avería que produce "k" artículos defectuosos entre los 1000 fabricados ese día.

1) Determínese la probabilidad de no obtener más de un artículo defectuoso en la inspección de ese día.
2) Si habitualmente la proporción de artículos defectuosos que produce la máquina es 0'01 y los artículos se empaquetan en lotes de 100, determínese el número medio de artículos defectuosos por lote.
3) Si se inspeccionan artículos hasta encontrar el quinto defectuoso, determínese el número medio de artículos inspeccionados.

4.8.4 Un opositor duda entre dos modos de preparar los 100 temas del examen, que consta de 5 preguntas de temas distintos, y para aprobar hay que contestarlas todas correctamente. El primer modo consiste en estudiar sólo 80 temas, de modo que las preguntas de estos temas serán contestadas correctamente, pero el opositor suspenderá si alguna pregunta hace referencia a los 20 temas no estudiados. El segundo modo consiste es estudiar con menor profundidad cada uno de los 100 temas; en tal caso, la probabilidad de contestar correctamente cada pregunta es 0'8. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar en cada caso?

4.8.5 Sea una población de "N" individuos, divididos en dos categorías "A" y "B". Si se seleccionan 10 individuos, determínese la distribución del número de individuos del tipo "A" que hay entre los seleccionados, tanto si la selección se hace con reposición como si no hay reposición.

4.8.6 El Corte Francés recibe tres remesas de juguetes de tres proveedores distintos. La primera remesa consta de 1000 muñecos, siendo 0'008 la probabilidad de que un muñeco sea defectuoso. La segunda remesa está formada por 500 bicicletas, y se sabe que entre ellas hay 10 defectuosas. La tercera remesa está formada por 20 ordenadores procedentes de un fabricante que de cada cuatro ordenadores que monta uno es defectuoso. El Corte Francés realiza el siguiente control de calidad: la primera remesa se acepta si la probabilidad de que haya tres defectuosos en ella es inferior a 0'1; el criterio para la tercera remesa es el mismo, y la segunda remesa se acepta si, elegidas al azar 3 bicicletas, la probabilidad de que dos sean defectuosas es inferior a 0'15.

1) ¿Qué remesas se aceptarán?
2) Si se elige al azar uno de los artículos recibidos y es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la primera remesa?
3) Si el fabricante de ordenadores inspecciona su producción, calcúlese el número medio de ordenadores sin defecto que inspecciona hasta que encuentra el segundo defectuoso.

4.8.7 Si de una baraja española de 40 cartas se extraen tres cartas, determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de oros seleccionados, y la función de probabilidad de la variable "Z" que expresa el número de figuras seleccionadas.

4.8.8 En una empresa hay una probabilidad de $1/3$ de que las piezas fabricadas sean de calidad superior. Determínese la probabilidad de que entre 20 piezas escogidas al azar, al menos la mitad sean de calidad superior.
En un lote de 10 piezas se han encontrado 6 de calidad superior. Determínese la probabilidad de que escogidas 3 piezas al azar de este lote, haya al menos una que no sea de calidad superior.

4.8.9 En una patera viajan 15 mujeres, 40 hombres y 3 niños. Si se seleccionan 20 pasajeros al azar, determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de mujeres seleccionadas, y la función de probabilidad de la variable "Z" que expresa el número de hombres seleccionados.

4.8.10 Un lote de 92 diamantes lo forman 6 de calidad A, 60 de calidad B, 11 de calidad C y 15 de calidad D. Si se seleccionan al azar 35 diamantes y las variables "X", "Z", "T" y "U" expresan respectivamente el número de ellos son de calidad A, B, C y D, determínese la distribución de probabilidad de las variables (X;Z), (T;U) y (X;Z;U).

Enunciados de los problemas resueltos en el libro

Tema 5: Unidimensionales continuas

5.1.1 Si la variable "X" tiene distribución uniforme en $[-1;1]$ e $Y = X^2$, determínese el coeficiente de correlación entre "X" e "Y".

5.1.2 La variable aleatoria "X" que expresa la demanda diaria de cerveza en un bar tiene distribución uniforme en el intervalo $[2;7]$.
1) Calcúlese la probabilidad de los sucesos $X \leq 4$, $X > 3$, $5 < X \leq 6$.
2) Determínese la función de densidad de $Y = 3 + 2.X$.

5.1.3 Siendo "A" una variable aleatoria uniforme en $[0;4]$, determínese la probabilidad de que la ecuación $4.x^2 + 4.A.x + A + 2 = 0$ tenga raíces reales.

5.1.4 Si de modo independiente se eligen al azar un punto "Pepe" del intervalo $[0;3]$ y otro "Juan" del intervalo $[-2;0]$, determínese la probabilidad de que la distancia entre ellos no sea inferior a 3.

5.1.5 Hay que repartir 5 euros entre dos cuentas bancarias que pagan intereses respectivos $X \approx U(0'045;0'065)$ e $Y \approx U(0'035;0'075)$, siendo independientes las variables aleatorias "X" e "Y". Compruébese que con cualquier política de inversión se obtiene la misma ganancia esperada. Determínese la política que minimiza la variabilidad de la ganancia.

5.1.6 Siendo $X \approx U(0;a)$, demuéstrese que la variable tipificada correspondiente a "X" tiene distribución uniforme en el intervalo $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.

5.1.7 Para satisfacer sus necesidades, un consumidor que dispone de 4 euros necesita 2 unidades del bien "A" y una unidad del bien "B".
1) Siendo $X \approx U(0;2)$ e $Y \approx U(0;2)$ los respectivos precios unitarios de dichos bienes, determínese la probabilidad de que el consumidor satisfaga sus necesidades, supuesto que "X" e "Y" son independientes.
2) Determínese la probabilidad de que el consumidor llegue a satisfacer sus necesidades si el precio del bien "B" siempre es inferior al del bien "A" y la función de densidad de probabilidad de $(X;Y)$ es $g(x;y) = k \; ; \; 0 \leq y \leq x \leq 2$

5.1.8 Siendo "X" una variable aleatoria continua cuya función de distribución es "F", demuestrese que $Z \approx U(0;1)$, siendo $Z = F(X)$.

5.1.9 Si Álvaro y Mario son hermanos que se citan en la Plaza de las Flores entre las 6 y las 8 de la tarde con el compromiso de esperar media hora, calcúlese probabilidad de que se encuentren.

5.1.10 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $[a;b]$, determínese la distribución de probabilidad de las variables $Y = \text{máx.}\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $Z = \text{mín.}\{X_1, \ldots, X_n\}$.
Un sistema tiene dos fusibles de protección. Si la duración de cada fusible (en años) tiene distribución $U(0;1)$, halle la duración esperada del sistema y la varianza de la duración, tanto si los fusibles están en paralelo como si están en serie.

5.1.11 Sean "Z" y "W" variables aleatorias independientes, ambas $U(0;\theta)$, siendo desconocido θ. Si $T = \text{máx.}\{Z;W\}$, demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(Z;W) / T = t$ no depende de θ.

5.1.12 Sean "Z" y "W" variables aleatorias independientes, ambas $U(\theta;3)$, siendo desconocido θ. Si $T = \text{mín.}\{Z;W\}$, demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(Z;W) / T = t$ no depende de θ.

5.3.1 Si $X \approx N(8;3)$, calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos:

1) $X \geq 13'1$ 2) $11 < X < 14$ 3) $6 \leq X \leq 11$

4) $2.X + 5 \leq 21$ 5) $3 - 7.X \geq -25'7$ 6) $9/(X+1) > 1$

7) $1 + X^2 > 50$ 8) $\sqrt{40 - 5.X} \notin \Re$ 9) $\text{Ln}\,(8 - X) \in \Re$

5.3.2 Si $X \approx N(8;3)$, calcúlese "k" sabiendo que:

1) $P(2.X \leq 3.k) = 0'9292$ 2) $P(|X - 8| \geq k) = 0'9414$

3) $P(k.X \leq 5) = 0'8997,\ k > 0$ 4) $P(5 < X \leq k) = 0'6294$

5) $P(X^k \leq 2) = 0'9495$ 6) $P(2^X \leq k) = 0'5$

5.3.3 Si la duración (en horas) de un tipo de bombillas es N(180;5), halle la probabilidad de que una bombilla dure más de 170 horas, la probabilidad de que dure menos de 165 horas y la probabilidad de que dure más de 1180 horas.

5.3.4 Si la demanda de gasolina durante un cierto periodo de tiempo tiene distribución N(150000;10000), determínese la cantidad que hay que tener dispuesta a la venta para poder satisfacer la demanda con probabilidad del 95 %.

5.3.5 Determínense la media y la desviación típica de una variable "X" con distribución normal si $P(X < 18) = 0'1587$ y $P(X > 24) = 0'0338$.

5.3.6 Si la duración (en horas) de un tipo de bombillas es $N(280;\sigma)$, calcúlese σ si la probabilidad de que una bombilla dure entre 240 y 320 horas es $0'7994$.

5.3.7 Un camisero sabe que el cuello de sus clientes tiene distribución normal con media 36 cm. y desviación típica 1'5 cm. Si encarga a su proveedor habitual 3000 camisas, ¿cuántas han de tener el cuello comprendido entre las siguientes medidas 32–34 cm, 34–35 cm, 35–37 cm, 37–39 cm, 39–41 cm?

5.3.8 Si $X \approx N(5;1)$, determine la distribución de probabilidad de $Z = 3 + 2.X$

5.3.9 Si la altura "X" de los ciudadanos es normal con media 170 cm y desviación típica 3 cm, calcúlese la probabilidad de que un ciudadano mida menos de 173 cm si se sabe que mide más de 167 cm.

5.3.10 Calcúlense la media, la varianza, la mediana y el octavo decil de la variable normal "X" tal que $P(X < 18) = 0'1587$ y $P(X > 24) = 0'0338$.

5.3.11 En una fábrica de turrón, la cantidad de almendra de una tableta determina su calidad: normal" si la tableta tiene menos de 180 gramos de almendra, "extra" si tiene entre 180 y 200 gramos, y "superior" si tiene más de 200 gramos. La cantidad de almendra por tableta es una variable $N(\mu;\sigma)$, y se sabe que el 16'6 % de las tabletas son de calidad "superior", siendo el 12'3 % de calidad "normal". Determínense μ y σ. Calcúlese la probabilidad de que una tableta elegida al azar entre las de calidad "superior" no contenga más de 208 gramos de almendra. Si se eligen 15 tabletas al azar, independientemente unas de otras, calcúlese la probabilidad de que al menos dos sean de calidad "superior".

5.3.12 Un fabricante vende un artículo a un precio de 100 euros. Si el peso "X" del artículo es inferior a 8 gr. no lo puede vender y representa una pérdida total. La distribución del peso es $N(k;1)$, donde la media "k" puede ser ajustada a voluntad. Si el coste de producción por artículo es $30 + 5.k$ euros, determínese el valor de "k" que maximiza el beneficio esperado.

5.3.13 El número "X" de vehículos por hora que llegan a una gasolinera para repostar combustible tiene distribución de Poisson de parámetro θ, y se sabe que la décima parte de los vehículos que llegan a repostar a la gasolinera aprovechan la parada para cambiar el aceite en un taller ubicado en la misma con esa única función. Tanto el taller como la gasolinera permanecen abiertos 8 horas al día, y cambiar de aceite cuesta 4000 dinares.

1) Determínese θ sabiendo que $5.P(X = 2) = 3.P(X = 3)$.
2) Calcúlese la probabilidad de que haya al menos un cambio de aceite por hora.
3) Si mantener abierto el taller supone un coste semanal de 60000 dinares, ¿puede considerarse un negocio rentable?
4) Si la demanda diaria de gasolina (en litros) tiene distribución normal de media 4320 y varianza 3000, y la gasolinera tiene unos surtidores que son recargados a diario y cuya capacidad es de 1400 litros, determínese el menor número de surtidores que deben colocarse si se desea que la demanda diaria sea satisfecha al menos el 95 % de las veces.

5.3.14 Halle la expresión de los momentos de $X \approx N(\mu;\sigma)$ respecto a su media. Halle el coeficiente de curtosis de "X" y estúdiese la relación de dicho coeficiente con los parámetros de la distribución.

5.3.15 Una consultora sabe que el número de candidatos que superan su examen es $N(\mu;1)$, donde μ depende de la dificultad del exámen. Si se desean cubrir 20 puestos de trabajo en una multinacional, ¿qué valor ha de tener μ para que los puestos se cubran con una probabilidad del 95 %? La consultora cobra a la multinacional por su trabajo según el número de candidatos que le presente: 2000 euros si presenta entre 18 y 25 candidatos y 1600 euros en los demás casos. Considerando que el número de candidatos presentados al examen es una variable continua, halle el valor de μ que maximiza el ingreso de la consultora.

5.3.16 El peso de los huevos (gramos) de una granja es $N(80;5)$. Un supermercado sólo compra los huevos que tienen un peso mayor de 72 gramos, y para controlar los suministros somete los huevos a un control que consiste en pesarlos hasta encontrar el primero que no tenga el peso exigido. Se acepta el envío si el número de huevos que ha sido necesario examinar es mayor que 5.

1) Calcule el número medio de huevos que es necesario examinar.
2) Si se hacen 100 envíos de huevos, ¿cuántos se espera que sean aceptados?
3) Si la inspección se realiza hasta encontrar el tercer huevo con poco peso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea necesario examinar más de 6 huevos?
4) Si una persona compra una docena de huevos, ¿cuál es la probabilidad de que encuentre alguno que no tenga el peso requerido por el supermercado?
5) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que el peso de un huevo esté entre 72'5 y 87'5 gramos, y comprobar que se cumple dicha acotación

5.3.17 Si $X \approx N(0;\sigma)$, determínese la densidad de $U = 1/X$.
Calcúlese el 90 percentil de $T = 3.X + 2$ en función de "σ".

5.3.18 Sean "Z" y "W" variables aleatorias independientes, ambas $N(\theta;\sigma)$, siendo conocida σ y desconocida θ. Siendo $T = Z + W$, demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(Z;W)\,/\,T = t$ no depende de θ.

5.4.1 Una máquina hace piezas cuyos pesos se distribuyen normalmente con media 20 gr. y desviación típica 3 gr. Las piezas se pesan en lotes de 4 unidades.

1) Calcúlese la probabilidad de rechazar un lote si ello sucede cuando su peso está fuera del intervalo $[74;86]$.
2) Calcúlese la probabilidad de rechazar un lote si ello sucede cuando el aleatorio peso medio de las piezas del lote está fuera del intervalo $[19;21]$.
3) Con el criterio de rechazo establecido en 2), calcúlese la probabilidad de que se rechacen menos de dos lotes en una partida de siete.

5.4.2 Siendo independientes $X \approx N(8;3)$ e $Y \approx N(9;4)$, calcúlese $P(Z \leq 100)$ si $Z = 4.X + 5.Y$.

5.4.3 Considerando que $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes, todas con distribución $N(\mu;\sqrt{8})$, sean:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \; \overline{Y} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Calcúlese "n" de modo que la probabilidad de que $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ difieran en menos de una unidad sea al menos $0'95$.

5.4.4 Sean $X \approx N(1;1)$ e $Y \approx N(2;2)$ independientes y $Z = 4.X - 6.Y + 10$. Empleando la función generatriz de momentos, determínese la distribución de probabilidad "Z".

5.4.5 Sean $X \approx N(1;1)$ e $Y \approx N(a;a)$ independientes y $Z = a.X + Y$. Mediante la función generatriz de momentos, determínese "a" si $P(Z > a + 1) = 0'2$.

5.4.6 Sean $X \approx N(1;2)$ e $Y \approx N(3;4)$ independientes y $Z = 2.X + a.Y$. Determínese "a" sabiendo que $P(Z \leq 0'4329) = 0'2018$.

5.4.7 Si la venta diaria de ilusiones tienen distribución $X \approx N(10;2)$, determínese la probabilidad de que en un año no bisiesto las ventas no superen las 3600 unidades.

5.4.8 Siendo independientes $X \approx N(4;8)$ y $Z \approx N(5;1)$, calcúlese $P(X > Z)$.

5.4.9 Un vendedor tiene 12 piezas, de las cuales dos son defectuosas. Un individuo está interesado en comprarlas todas. El vendedor puede colocar las doce en una caja o en dos cajas de seis. Sabiendo que el comprador examinará sólo dos piezas (una de cada caja si el vendedor elige esta última opción) y que no hará la compra si alguna es defectuosa, razónese cuál de las siguientes estrategias es mejor para el vendedor:

a) Colocar las 12 piezas en una caja

b) Colocarlas en dos cajas con las defectuosas en la misma caja

c) Colocarlas en dos cajas con las defectuosas en cajas distintas

El peso de una pieza defectuosa tiene distribución $N(40;3)$, y el de una correcta es $N(50;1)$. El comprador ya no examinará dos piezas para decidir si hace la compra o no, sino que pesará la caja o cajas, según el caso, considerando aceptable la caja de 12 piezas si su peso es superior a 600 gramos, y la caja de 6 si su peso es mayor que 300. Si el peso de la caja de 12 vacía es $N(12;0'7)$ y el de la caja de 6 vacía es $N(9;0'4)$, ¿cuál de las tres estrategias anteriores es ahora la mejor para el vendedor?

5.4.10 Sean $X_1, ... , X_n, Y_1, ... , Y_m$ independientes, todas $N(\mu;\sigma)$. Sea "X" la media aritmética de $X_1, ... , X_n$ e "Y" la media aritmética de $Y_1, ... , Y_m$.

1) Determínese la distribución de probabilidad de $Z = a.X + b.Y$, con $a, b \neq 0$.
2) ¿Qué debe suceder para que $E(Z) = \mu$? En tal caso, determínense los valores de "a" y "b" que minimizan la varianza de "Z".

5.4.11 El tiempo empleado en la fabricación de un tipo de pieza se distribuye uniformemente entre 10 y 12 minutos, siendo independientes los tiempos de fabricación de las distintas piezas.

1) Calcúlese la probabilidad de que se necesiten no menos de 22 minutos para fabricar dos de esas piezas.
2) El coste asociado depende del tiempo de fabricación de modo que si éste es inferior a 11 minutos, el coste es de 5 euros por minuto, y si se superan los 11 minutos pasa a ser de 8 euros por minuto. Determínese el coste esperado para la fabricación de una pieza.
3) Sabiendo que el número de piezas fabricadas diariamente tiene distribución $N(50;4)$, determínese la probabilidad de que en una semana se hayan producido menos de 280 piezas si se sabe que se han producido más de 240 (se trabaja cinco días a la semana y las producciones de dos días distintos son independientes)
4) Las piezas se empaquetan en lotes para facilitar su distribución. Si el 5 % de las piezas fabricadas son defectuosas, ¿cuántas piezas debe tener un lote para que el 99'9 % de los lotes contenga menos de 4 piezas defectuosas?

5.4.12 Se sabe que $\Phi(t) = e^{t.\mu + 450.t^2}$ es la función generatriz de momentos de la variable que expresa el gasto de un turista.

1) Si se seleccionan al azar 100 turistas y para estimar el desconocido valor de μ se toma el gasto medio de los seleccionados, determínese la probabilidad de que la estimación resultante se diferencie de μ en más de 6 unidades.
2) ¿Cuántos turistas han de formar la muestra si se desea que la estimación se diferencie de μ menos de dos unidades con probabilidad no inferior a 0'95? ¿Y si, con igual probabilidad, de desea que se diferencie en menos de 5 unidades?

5.4.13 El 15 % de las bombillas que fabrica OSRAM son defectuosas. Las bombillas se embalan en cajas de 8 o de 12 unidades, siendo el número de cajas pequeñas el doble que el de cajas grandes. El peso de una bombilla (en gramos) tiene distribución $N(130;6)$, y los pesos de las cajas pequeña y grande (vacías) tienen distribuciones $N(10;1)$ y $N(15;2)$ respectivamente. Una vez embaladas las bombillas, las cajas grandes se rechazan si contienen más de 2 bombillas defectuosas, y las pequeñas se rechazan si su peso no está entre 1 y 1'1 kilos.

1) Determínese la probabilidad de aceptar una caja grande.
2) Determínese la probabilidad de rechazar una caja pequeña.
3) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar una caja elegida al azar?
4) Si inspeccionamos las cajas antes de cargarlas al camión que las lleva a los puntos de venta y sólo cargamos las aceptables, determínese la probabilidad de que sea 10 el número de cajas cargadas antes de rechazar la primera.

5.4.14 Siendo $X \approx N(\mu;\sigma)$ e $Y \approx N(\mu;\sigma)$ independientes, analice la independencia de $Z = X + Y$ y $T = X - Y$ mediante la función generatriz de momentos. Siendo $X \approx N(0;a)$ e $Y \approx N(0;b)$ independientes, analice la independencia de $Z = X + Y$ y $T = X - Y$ mediante la función generatriz de momentos.

5.4.15 Los objetos fabricados por una máquina pueden tener el defecto "A" o el "B"; y se ha comprobado de cada mil objetos fabricados, 25 presentan el defecto "A", 30 presentan el defecto "B", y 5 presentan ambos defectos. La empresa embala los objetos en cajas de 20 unidades, y el peso de cada objeto tiene distribución normal de media 5 kg. y varianza $0'4\ \text{kg}^2$, mientras que el peso de la caja vacía tiene distribución normal de media 1 kg. y varianza $0'2\ \text{kg}^2$. La empresa utiliza dos criterios para determinar si una caja es defectuosa:

Criterio I: contando el número de objetos defectuosos en la caja, y si éste es superior a 2 la caja se considera defectuosa.

Criterio II: comprobando el peso de las cajas; una caja se considera defectuosa si su peso no está entre 95 y 105 kg.

La empresa aplica el criterio I el doble de veces que el II

1) Determine la probabilidad de que un objeto no presente ningún defecto.
2) Calcule la probabilidad de que una caja sea defectuosa.
3) Sabiendo que una caja se ha considerado correcta, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido examinada mediante el criterio I?

5.4.16 Siendo $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución logarítmico normal de parámetros μ y σ, determínese la distribución de probabilidad de su media geométrica.

5.4.17 Alguien afirma que si tenemos como mínimo 1000 variables aleatorias independientes, todas con media 0 y varianza 1, ocurrirá que su media aritmética diferirá de 0 en una décima o más, como máximo en el 10 % de los casos. Demuestre que usted es capaz de llegar a la misma conclusión. ¿En cuánto disminuiría el número mínimo de variables necesario para alcanzar la misma conclusión si supiéramos además que se distribuyen normalmente?

5.4.18 Los costes de fabricación de un producto tienen distribución N(10;3), y los ingresos, independientes de los costes, tienen distribución N(12;4). Si el impuesto de beneficio es del 35 %, halle la probabilidad de pagar entre 0'4 y 0'9.

5.7.1 Sea $X \approx \text{Exp.}(0'2)$ la variable que expresa la duración (minutos) de las llamadas telefónicas que se hacen desde una cabina pública.

1) Calcúlese la probabilidad de los sucesos $X \leq 3$, $X > 5$ y $2 < X \leq 4$.
2) Calcúlese la probabilidad de que la duración de una llamada se desvíe de la duración media en menos de un minuto.
3) Si una llamada ya dura más de 2 minutos, calcúlese la probabilidad de que dure más de 7 minutos.
4) Si hay dos cabinas juntas, ambas ocupadas, ¿en cuál de ellas harías cola si tienes mucha prisa y el individuo de la primera ya lleva 15 minutos hablando y el de la segunda lleva 1 minuto?

5.7.2 En una región llueve un día de cada tres. Si no llueve, el tiempo de espera (en minutos) al llegar a la parada del autobús tiene distribución uniforme en $[0;8]$; pero, si llueve, la distribución del tiempo de espera es exponencial de media 10.

1) Calcúlese la probabilidad de que un usuario deba esperar más de 5 minutos.
2) Si un día el usuario ha esperado más de cinco minutos, calcúlese la probabilidad de que haya sido un día de lluvia.

5.7.3 Si $X_1 \approx \text{Exp.}(\theta_1), \dots, X_n \approx \text{Exp.}(\theta_n)$ son independientes, determínese la distribución de probabilidad de la variable $Z = \text{mín.}(X_1; \dots\dots; X_n)$.

5.7.4 El tiempo (minutos) que debe esperar un avión en vuelo hasta que se autoriza su aterrizaje en el aeropuerto del Llano de Brujas tiene distribución exponencial negativa de media $1/(\lambda.n)$, siendo "n" el número de pistas de aterrizaje operativas en el aeropuerto en ese momento y λ el coeficiente de eficiencia estacionaria del mismo.

1) Si $\lambda = 0'075$, determínese el número de pistas necesarias para que al menos el 95 % de los aviones no tenga que esperar más de 20 minutos.
2) Considérese que el aeropuerto puede controlar el valor de λ y que el coste diario, en dólares, de mantener λ en un cierto valor es $10000.\lambda.n$.
   Si un día se esperan 10 aviones y el coste de mantener un avión sobrevolando el aeropuerto es 100 $/minuto, determínese el valor óptimo de λ para minimizar el coste esperado.

5.7.5 El beneficio de una empresa está expresado por $Y = -(\text{Ln}\,(1 - X))/2$, siendo $X \approx U(0;1)$. Determinénse:

1) La distribución de probabilidad del beneficio.
2) Probabilidad de que el beneficio sea superior a 3.
3) Probabilidad de que el beneficio sea superior a 9 si se sabe que es superior a 6.

5.7.6 Si la duración "X" de un tipo de suspiro tiene distribución exponencial negativa de media 2, calculénse el primer cuartil y $P(X < 1 / X < 2)$.

5.7.7 Siendo $a \in (0;1)$, sea "X" con densidad $f(x) = a.k.x^a.(1-x)$, $0 \le x \le 1$.

1) Determínese "k".
2) Calcúlese la función de distribución de "X".
3) Calcule la función de densidad de $Y = -\text{Ln } X$ y $E(Y)$.
4) Si las variables $X_1, \dots, X_n$ son independientes y tienen la misma distribución de probabilidad que "X", calcule la media de la variable "Z":

$$Z = -\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} \text{Ln } X_i$$

5.7.8 Sea $X \approx \text{Exp.}(\lambda)$ la duración (horas) de la vida de un tipo de bicho.
Determine la media y la mediana de la variable "Z" que expresa la duración total de la vida de los bichos que ya han vivido 100 horas. Calcule la proba-bilidad de que uno de esos bichos viva más de 250 horas, y la probabilidad de que viva aún más de 250 horas.
Determine la media de la variable "W" que expresa el tiempo de vida que aún les queda a los bichos que ya han vivido 100 horas.

5.7.9 Si la duración (días) de una correa de reloj tiene distribución exponencial negativa de media 100. ¿Cuántos días puede garantizarse, con probabilidad 0'9, que durará la correa? Con la compra de la correa se regala una de repuesto cuya duración tiene distribución exponencial negativa de parámetro 0'02. ¿Cuál es la probabilidad de que hasta dentro de 90 días el cliente no deba gastar más dinero en correas de reloj?

5.7.10 La duración (horas) de un tipo de válvula de seguridad tiene distribución exponencial de 100 horas de media. Si la válvula se cambia cuando falla o después de 300 horas, determínese la función de distribución y la media de la variable "T" que expresa el tiempo que la válvula está en servicio.

5.7.11 Un artilugio se construye mediante el ensamblaje instantáneo de dos piezas distintas P_1 y P_2 que se fabrican simultáneamente. El tiempo (meses) que tarda en fabricarse la pieza P_1 tiene densidad $f_1(x) = a.e^{-5.x}$, $x > 0$; para la pieza P_2 la densidad es $f_2(z) = b.e^{-4.z}$, $z > 0$.

1) Calcúlese la probabilidad de que el artilugio se construya antes de 1 mes.
2) Calcúlese la probabilidad de que P_1 tarde menos en construirse que P_2.
3) Si una tercera pieza P_3 tarda en fabricarse el triple que la P_1, determínese cómo se distribuye el tiempo de fabricación de P_3.

5.7.12 Una central eléctrica dispone de dos turbinas del tipo "A" cuyo tiempo de vida sigue una distribución exponencial de media 2 años, y de tres turbinas del tipo "B" con tiempo de vida exponencial de varianza 1/9. La central trabaja con dos turbinas que funcionan independientemente; y el sistema falla si fallan las dos turbinas.

1) Calcule el tiempo máximo que una turbina tipo "A" ha funcionado el 75 % de las veces hasta averiarse.
2) Calcule la probabilidad de que el sistema funcione sin fallar durante más de tres años si se monta con una turbina de cada clase.
3) Calcule la probabilidad de que el sistema funcione sin fallar durante más de tres años si las dos turbinas se eligen al azar.
4) Sabiendo que el sistema ha funcionado durante más de tres años sin avería, calcule la probabilidad de que lo haya hecho con una turbina de cada clase.

5.7.13 Sea $X \approx \text{Exp.}(\theta)$ el tiempo (en segundos) tarda que una máquina en fabricar una tuerca. Supuesto que los tiempos de fabricación de las distintas tuercas son independientes, determínese la distribución de probabilidad de la variable "N" que expresa el número de tuercas que fabrica la máquina durante "t" segundos de trabajo ininterrumpido.

5.7.14 El tiempo (minutos) que tarda un dentista en hacer una revisión a un paciente tiene distribución exponencial de parámetro 0'1, y el tiempo que tarda en hacer una extracción tiene distribución exponencial de parámetro 0'5. Por experiencia, el dentista sabe que dos terceras partes de sus clientes vienen sólo a revisión.

1) Determínese la probabilidad de que el dentista tarde más de 15 minutos con un paciente.
2) Si ha estado con un paciente menos de 15 minutos, determínese la probabilidad de que le haya realizado una extracción.
3) Si una mañana tiene previstas 3 revisiones, ¿cuál es la probabilidad de que tarde menos de 20 minutos?
4) Si sólo hiciese extracciones, determínese la probabilidad de que atienda como mucho 10 pacientes en cuatro horas de trabajo.

5.7.15 El número de llegadas a una gasolinera en el intervalo $(0;t)$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda.t$.

1) Determínese la distribución de la variable "Z" que expresa el tiempo que transcurre hasta la primera llegada.
2) Determínese la distribución de la variable "T" que expresa el tiempo que transcurre hasta que llegan "r" coches.

5.7.16 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad, sea "Z" su media aritmética. Determínese la distribución de probabilidad de "Z" en los siguientes casos:

$$1)\ X_i \approx \text{Exp.}(\theta)\ ;\ 2)\ X_i \approx G(p;\theta)$$

5.7.17 Las normas especifican que un tipo de pieza debe tener 4 cm de longitud, pero su longitud real (en centímetros) tiene distribución $N(4;0'1)$. El fabricante pierde 0'5 euros si la longitud real está entre 4'05 y 4'08, y pierde 1 euro si la longitud real es superior a 4'08. Halle la distribución de probabilidad de la pérdida por pieza y su valor esperado.
Las piezas son producidas por dos máquinas "A" y "B". El número de piezas producidas en una hora por cada máquina tiene distribución de Poisson, de parámetro 5 para la máquina "A", y de parámetro 6 para "B", siendo independientes las producciones de ambas máquinas. Determínese la probabilidad de que en una hora se produzcan más de 12 piezas en total.
Siendo Exp.(1/12) el tiempo que tarda la máquina "C" en producir una pieza y después de producir cada pieza se anota el tiempo empleado, determínese la probabilidad de que sea 10 el número de piezas inspeccionadas hasta que se encuentra una que tarda más de 15 minutos en ser fabricada.

5.7.18 Para hacer una carretera se contrata la arena, la grava y el cemento a tres empresas que no siempre pueden entregar el material a tiempo. La experiencia indica que, con independencia unas de otras, el tiempo (días) que tarda cada una de ellas en servir un pedido tiene distribución exponencial de parámetros 0'5, 0'8 y 1 para arena, grava y cemento respectivamente. Se considera que una entrega se ha realizado a tiempo si la espera es inferior a 1 día.
Un día se piden tres cargamentos, uno de cada material.
1) Calcúlese la probabilidad de que los tres materiales sean entregados a tiempo.
2) Calcúlese la probabilidad de que ningún material sea entregado a tiempo.
3) Calcúlese la probabilidad de que al menos 2 materiales se entreguen a tiempo.
4) Se pacta que el precio del cemento es 50 euros/Tm y que cada cargamento es de una tonelada; sin embargo, el peso real del cargamento (en toneladas) es una variable $N(1'2;0'5)$. Cuando un cargamento llega a la obra es pesado, y el precio pasa a ser 40 euros/Tm si el peso es inferior a la tonelada pactada. Si durante un mes se piden 4 cargamentos, calcúlese el coste esperado.

5.7.19 La densidad de la variable "X" que mide las ventas semestrales (decenas de miles de euros) de un representante comercial es $f(x) = k.e^{-0'5.x}$, $x > 0$.
1) Compruebe que f(x) es una función de densidad y especifique el valor de "k". ¿Qué distribución siguen las ventas semestrales de ese representante?, ¿en qué proporción de semestres las ventas superan los 15.000 euros?
   Calcúlense la media y la varianza de "X". Determínense la media y la varianza de las ventas correspondientes a dos años completos (suponga los semestres independientes entre sí).
2) Cada semestre la empresa premia a sus vendedores con un incentivo de 500, 1.500 o 4.000 euros según que sus ventas sean inferiores a 20.000 euros, estén en 20.000 y 30.000 euros, o superen los 30.000 euros. ¿Cómo se distribuye el incentivo semestral?, ¿cuál es su media? La empresa propone una nueva política de incentivos semestrales: si las ventas del representante son inferiores a 30.000 euros, recibe el 6 % de ellas, y el 10 % si las ventas son superiores a 30.000 euros. Desde el punto de vista del valor esperado del incentivo semestral, ¿cuál es la propuesta más ventajosa para el representante?

5.7.20 Sean "Z" y "W" variables aleatorias independientes, ambas con distribución exponencial de parámetro desconocido θ. Demuéstrese que la distribución de probabilidad de la variable $(Z;W)/T=t$ no depende de θ, siendo "T" la suma de "Z" y "W".

5.7.21 El tiempo de vida sin romperse de una máquina tipo "A", medido en años, es una exponencial negativa con $\lambda=1$, y el de otra máquina tipo "B" tiene densidad $f(x)=2.x.e^{-x^2}$, $x>0$.

1) Compruebe que ambas funciones son funciones de densidad, halle las correspondientes funciones de distribución y compare entre sí las medianas, los percentiles 10 % y 90 % de ambas máquinas. ¿Puede decirse que una de las máquinas tiende a durar más que la otra? ¿Cuál?
2) Si las dos máquinas ya han funcionado "r" años, calcúlese la probabilidad de que funcionen más de "s" años adicionales sin romperse. ¿Diría de alguna de las máquinas que tiene pérdida de memoria o, coloquialmente, que no se desgasta con el uso? ¿Cómo expresaría coloquialmente lo que sucede con la otra?

5.9.1 Siendo independientes $X \approx \text{Exp.}(1/2)$, $Y \approx G(7;1/2)$ y $Z \approx N(0;3)$, determine la distribución de probabilidad de la variable $W = X + Y + (Z/3)^2$.

5.9.2 Las coordenadas $(X;Y;Z)$ de un punto de $\Re^3$ son variables aleatorias independientes $N(6;2)$, $N(7;2)$ y $N(8;2)$ respectivamente. Calcule la probabilidad de que la distancia entre dicho punto y el $(6;7;8)$ no sea superior a 3'07.

5.9.3 Siendo X, Y, Z y T variables independientes con distribución $N(0;1)$, sean $U = (X^2 + Y^2 + Z^2)/T^2$ y $V = T^2$.

1) Determine la función de densidad de la variable $U / V = v$.
2) Determine la función de densidad de la variable $V / U = u$.

5.9.4 Si $X \approx U(0;1)$, demuestre que $Y = -2.\text{Ln } X \approx \chi_2^2$.

Si $X \approx \text{Exp.}(\lambda)$, demuestre que $Y = 2.\lambda.X \approx \chi_2^2$.

5.9.5 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ independientes, todas con distribución $U(0;1)$, determine la distribución de probabilidad de $Z = -2.\left(\text{Ln } X_1 + \ldots + \text{Ln } X_n\right)$.

5.9.6 Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 variables independientes, todas $N(\mu;\sigma)$.
Sean $X = (X_1 + X_2)/2$ e $Y = (Y_1 + Y_2)/2$, siendo $Z \approx N(0;\sigma)$, independiente de las anteriores.

1) Determine la media, la varianza y la función generatriz de momentos de la variable $U = (X - Y)^2$.
2) Determine la media, la varianza y la función generatriz de momentos de la variable $U + Z^2$. ¿Es esta variable de igual tipo que cada uno de los sumandos?

5.9.7 Si $X \approx \chi_n^2$ e Y son independientes y $Z = X + Y \approx \chi_k^2$ $(k > n)$.
Demuestre que $Y \approx \chi_{k-n}^2$.

5.9.8 En una empresa preparan contenedores de conservas de distintos vegetales para su venta. Expresado en toneladas, el peso de los contenedores de tomate tiene distribución $N(3;1'5)$, el de los contenedores de melocotón es $N(5;2)$, y el de los contenedores de piña es $N(4;4)$, todos independientes.

1) En el almacén están preparando dos cargamentos, el primero con un contenedor de tomate y otro de melocotón, y el segundo con dos de piña. Determine la probabilidad de que el primer cargamento pese más que el segundo.
2) La empresa también fabrica botes de pera con un peso teórico de 500 gramos, pero hay desviaciones respecto de ese peso, desviaciones que tienen distribución $N(0;1'5)$, con independencia unos botes de otros. Si un empleado apuesta 500 euros a que en un lote con botes de pera aleatoriamente seleccionados, la suma de los cuadrados de las desviaciones de los pesos de los botes respecto al peso teórico no es mayor que 28, calcule el número de botes que debe tener el lote para que el juego sea justo.

5.9.9 Determine la función de densidad de $Z = -2.\text{Ln } X$, siendo $X \approx U(0;1)$.
Siendo $W_i \approx N(0;4)$, $i = 1,2,3$, determine la distribución de "U", siendo:

5.9.10 El tiempo que tarda un ciclista en dar cada vuelta a un circuito urbano tiene distribución exponencial de 2 minutos de media.

1) Calcule la probabilidad de que tarde menos de 3'36 minutos en 2 vueltas.
2) Calcule la probabilidad de que tarde menos de 28'4 minutos en 10 vueltas.

5.9.11 Si $X \approx N(0;\sqrt{5})$ y $Z = X^2 - 3$, determine la probabilidad de que "Z" se desvíe de su media en más de la quinta parte de su desviación típica.

5.11.1 Dos jugadores "A" y "B" lanzan una moneda a una raya situada a 6 metros de ellos. La longitud de los tiros de cada una tiene distribución $N(6;0'5)$, con independencia unos de otros. Si cada uno lanza dos veces y cada lanzamiento penaliza con el cuadrado de su desviación respecto a la raya, determínese la probabilidad de empatar en los siguientes casos:
1) Un jugador gana si su penalización no es superior a la mitad de la del otro.
2) Empatan si la suma de las penalizaciones de ambos es superior a 1'3462.

5.11.2 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas $N(0;\sigma)$, determínese la distribución de probabilidad de $Z = X_1^2 + \ldots + X_n^2$.
Siendo $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes, todas $N(0;\sigma)$, determínese la distribución de probabilidad de $V = (Y_1^2 + \ldots + Y_n^2)/n$.
Supuestas independientes las variables $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$, determínese la función de densidad de $T = Z/V$.

5.11.3 Siendo $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas $N(0;\sigma)$, determínese la distribución de $Y = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{1/n}$
¿Cómo se distribuye X^2/Y^n siendo "X" una cualquiera de las $X_1, \ldots, X_n$?

5.11.4 Sean X e Y variables independientes, ambas Exp.(1/2). Obténgase una F-Senedecor a partir de ellas.
Sean Z y T variables aleatorias independientes, ambas $N(0;1)$. Determínese la distribución de probabilidad de $1/W$, siendo $W = Z^2/T^2$.

5.11.5 Sean X, Y, Z y T variables independientes, todas $N(0;1)$.
Calcúlese $P(2.U > 5.V)$, siendo $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y $V = \sqrt{Z^2 + T^2}$.

5.11.6 Sean $X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n$ variables independientes, todas $N(0;1)$.
Determínese la distribución de "U" y $E(1/U)$, siendo:

$$U = \frac{X_1^2 + \ldots + X_k^2}{X_1^2 + \ldots + X_k^2 + \ldots + X_n^2}$$

5.11.7 Siendo X, Y y Z variables independientes, todas $N(0;4)$, sean:

$$U = 2.X + 3.Y - Z + 5 \,;\; Q = X^2 + Y^2 + Z^2 \,;\; W = Q/X^2$$

1) Calcúlense sus medias y sus varianzas.
2) Calcúlense $P(U < 20)$ y $P(Q < 20)$.
3) Calcúlese "q" tal que $P(Q \leq q) = 0'75$.

5.11.8 Un empresario fabrica dos artículos "A" y "B". El peso del artículo "A" tiene distribución $G(p;1/2)$ con varianza 10, y el peso de "B" tiene distribución gamma de media 2 y varianza 4. Todos los pesos son independientes.

1) Si el empresario considera conveniente empaquetar los artículos "A" de modo que el peso esperado de una caja sea 39, ¿cuántos artículos debe poner?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de una caja con 6 artículos "A" sea menor que el 261 % del peso de una caja con 10 artículos "B".
3) Si una caja con 10 artículos "B" contiene 3 defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que al examinar 5 aparezcan los 3 defectuosos?

5.11.9 Siendo $X_1, \ldots, X_4$ variables independientes, todas $N(0;\sigma)$, sean:

$$U = \frac{\sqrt{3}.X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}} \;;\; R = a.\sqrt{X_1^2 + X_2^2} \;;\; S = b.\sqrt{X_3^2 + X_4^2},\ b > 0$$

Determínese "u" tal que $P\left(\left|U\right| \le u\right) = 0'8$. Calcúlese $P(R > S)$.

5.11.10 Siendo $X_1, \ldots, X_{10}$ variables independientes, todas $N(0;3)$, sean:

$$A = X_1^2 + \ldots + X_{10}^2 \;;\; B = \frac{X_1}{\sqrt{X_2^2 + \ldots + X_5^2}} \;;\; C = \frac{X_1^2 + \ldots + X_5^2}{X_6^2 + \ldots + X_{10}^2}$$

Calcúlense $P(\sqrt{A} < 12)$, $P(\left|B\right| < 4'446)$ y $P(C > 11)$.